Université
Constantine 1

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique**

Université des frères Mentouri Constantine

Faculté des Sciences de la Technologie

Département d'Électronique

Faculté des Sciences
de la Technologie

Département Électronique

Systèmes non Linéaires

Notes de cours, Travaux Dirigés et Travaux Pratiques

Boubekeur BOUKHEZZAR

Laboratoire d'Automatique
et de Robotique de Constantine (LARC)

Département électronique, Université des frères Mentouri, Constantine,
Campus Ahmed Hamani, Route de Aïn-El-Bey,
25017 Constantine, Algérie
boubekeur.boukhezzar@umc.edu.dz

Table des matières

I Notes de cours vii

1 Généralités sur les systèmes non linéaires 1

1.1 Introduction . . . 1
1.2 Rappels sur les Systèmes . . . 1
1.3 Classification des Systèmes . . . 2
1.4 Systèmes linéaires-Systèmes non linéaires . . . 4
1.4.1 Principe de proportionnalité . . . 4
1.4.2 Principe de superposition . . . 4
1.4.3 Superposition dans le cas multivariable . . . 4
1.4.4 Systèmes linéaires . . . 5
1.4.5 Systèmes non Linéaires . . . 7
1.5 Représentation d'État d'un Système Linéaire . . . 8
1.5.1 Rappel sur la notion d'état . . . 8
1.5.2 Système linéaire à temps invariant (SLTI) . . . 8
1.5.3 Systèmes Linéaires à temps variant (SLTV) . . . 9
1.5.4 Systèmes Linéaires à paramètres variables(SLPV) . . . 9
1.6 Représentation d'État d'un Système non Linéaire . . . 9
1.6.1 Forme générale . . . 9
1.6.2 Système non linéaire affine en la commande . . . 10
1.7 Quelques Spécificités des Systèmes Non Linéaires . . . 11
1.7.1 Points d'équilibre isolés multiples . . . 11
1.7.2 Cycles limites . . . 12
1.7.3 Réponse indicielle disymétrique . . . 13
1.7.4 Bifurcations . . . 13
1.7.5 Chaos . . . 14
1.8 Exercices . . . 15

2 Plan de Phase, Bifurcations 21

2.1 Introduction . . . 21
2.2 Généralités-Définitions . . . 21
2.3 Construction des trajectoires de phase . . . 23
2.3.1 Quelques propriétés des trajectoires de phase . . . 23
2.3.2 Méthode analytique . . . 23
2.3.3 Méthode des isoclines . . . 24
2.4 Etude des points singuliers . . . 26
2.4.1 Cas linéaire . . . 26
2.4.2 Cas non linéaire . . . 27
2.5 Cycles limites . . . 30

2.5.1 Classification des cycles limites . . . 31
2.5.2 Existence des cycles limites . . . 31
2.6 Généralités sur les bifurcations . . . 32
2.7 Bifurcation col-noeud . . . 32
2.8 Bifurcation transcritique . . . 33
2.9 Bifurcation de pitchfork . . . 34
2.9.1 Bifurcation de pitchfork supercritique . . . 34
2.9.2 Bifurcation de pitchfork souscritique . . . 34
2.10 Bifurcation de Hopf . . . 35
2.10.1 Bifurcation de Hopf supercritique . . . 35
2.11 Exercices . . . 36

3 Méthode du premier harmonique 39
3.1 Analyse harmonique d'un système linéaire . . . 39
3.2 Non linéarités usuelles . . . 39
3.2.1 Saturation . . . 39
3.2.2 Seuil . . . 40
3.2.3 Seuil-saturation . . . 40
3.2.4 Relai . . . 41
3.2.5 Relai ternaire . . . 42
3.2.6 Hysterisis . . . 43
3.3 Classification des non linéarités . . . 43
3.3.1 Non linéarité continue et discontinue . . . 43
3.3.2 Non linéarité à mémoire et sans mémoire . . . 44
3.3.3 Non linéarité dure et molle . . . 44
3.4 Non linéarité séparable . . . 45
3.4.1 Réponse à une sinusoïde . . . 46
3.5 Etude d'un système à non linéarité séparable en boucle fermée . . . 50
3.6 Rappel sur le critère de stabilité de Nyquist . . . 51
3.7 Application aux systèmes à non linéarité séparable . . . 53
3.8 Etude de la stabilité des oscillations . . . 55
3.9 Exercices . . . 56

4 Stabilité des Systèmes non Linéaires Autonomes 61
4.1 Notion de stabilité . . . 61
4.1.1 Importance de la notion de stabilité . . . 61
4.1.2 Évolution historique de la notion de stabilité . . . 61
4.1.3 Définition intuitive de la stabilité . . . 62
4.2 Systèmes autonomes . . . 62
4.2.1 Systèmes invariants, systèmes libres . . . 63
4.2.2 Equation d'état tronquée . . . 63
4.2.3 Systèmes autonomes . . . 64
4.3 Points d'équilibre . . . 65
4.3.1 Définition d'un point d'équilibre . . . 65
4.3.2 Points d'équilibres d'un système linéaire . . . 67
4.4 Stabilité au sens de Lyapunov . . . 67
4.4.1 Stabilité d'un point d'équilibre . . . 67
4.4.2 Définition topologique de la stabilité . . . 67

4.4.3 Interprétation de la notion de stabilité 68
4.4.4 Stabilité autour de l'origine 68
4.4.5 Stabilité autour d'une trajectoire 69
4.5 Stabilité asymptotique 69
4.5.1 Point attractif 70
4.5.2 Domaine d'attraction 70
4.5.3 Stabilité asymptotique 70
4.5.4 Stabilité exponentielle 72
4.6 Stabilité globale 72
4.7 Rappel sur la Stabilité des Systèmes Linéaires 73
4.8 Première Méthode de Lyapunov 74
4.8.1 Linéarisé tangent 74
4.8.2 Première méthode de Lyapunov 75
4.9 Deuxième méthode de Lyapunov 76
4.9.1 Fonctions définies positives et fonctions de Lyapunov 76
4.9.2 Théorème de Lyapunov pour la stabilité locale 77
4.9.3 Théorème de Lyapunov pour la stabilité globale 78
4.10 Principe d'invariance de LaSalle 78
4.10.1 Ensemble invariant 79
4.10.2 Forme locale de la théorie des ensembles invariants 79
4.10.3 Forme globale de la théorie des ensembles invariants 80
4.11 Exercices 81

5 Commande non linéaire par retour d'état 83
5.1 Introduction 83
5.2 Exemple introductif 83
5.3 Algèbre différentielle 84
5.4 Linéarisation entrée-sortie d'un système SISO 85
5.4.1 Degré relatif 85
5.4.2 Linéarisation entrée-sortie 86
5.5 Linéarisation entrée-état 88
5.5.1 Position du problème 88
5.6 Synthèse de la commande linéarisante entrée-état 88
5.6.1 Cas où $r = n$ 88
5.6.2 Procédure de calcul de la commande linéarisante entrée-état 91
5.6.3 Cas où $r < n$ 92
5.7 Dynamique des zéros 93
5.7.1 Procédure d'annulation de la sortie 93
5.8 Exercices 94

6 Commande par modes glissants 97
6.1 Principe 97
6.2 Surface de glissement 97
6.3 Régime glissant 98
6.4 Calcul de la commande : Approche commande équivalente 99
6.4.1 Calcul de la commande équivalente u_{eq} 99
6.4.2 Calcul de la commande discontinue u_n 100
6.5 Calcul de la commande : Approche Slotine [1] 101

6.5.1 Surface de glissement 101
6.6 Synthèse de la surface de glissement 102
6.6.1 Surface de glissement linéaire 102
6.6.2 Surface de glissement non linéaire 103
6.7 Robustesse en Présence de Perturbations et Incertitudes Paramètriques [2] 103
6.7.1 Hypothèse de Correspondance (Matching Condition) 103
6.8 Forme canonique [3] 103
6.8.1 Surface linéaire, transformation linéaire 103
6.8.2 Surface linéaire, transformation non-linéaire 104
6.9 Exercices 104

II Solutions des exercices 107

1 Généralités sur le systèmes non linéaires 109

2 Plan de phase, bifurcations 123

3 Méthode du premier harmonique 131

4 Stabilité au sens de Lyapunov 143

III Travaux pratiques 151

1 Modélisation d'un Système non Linéaire sous Matlab/Simulink 153
1.1 Objectifs du TP 153
1.2 Mise en oeuvre par la librairie Simulink 153
1.2.1 Travail demandé 153
1.3 Mise en oeuvre avec un solveur Matlab 154
1.3.1 Travail demandé 155
1.4 Mise en oeuvre avec des blocs `function` 155
1.4.1 Travail demandé 156
1.5 Mise en oeuvre par S-function 156
1.5.1 Travail demandé 158
1.6 Bioréacteur à volume non constant 159

2 Méthode du Plan de Phase 161
2.1 Objectifs du TP 161
2.2 Tracé du portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol 161
2.3 Tracé du portrait de phase du pendule simple 161

3 Etude d'oscillateurs par la méthode du premier harmonique 163
3.1 Objectifs du TP 163
3.2 Etude théorique des conditions d'oscillations 163
3.2.1 Travail demandé 164
3.3 Simulation de l'oscillateur de Wien avec Matlab 165

4 Analyse de la Stabilité des Systèmes Non Linéaires par la Méthode de Lyapunov 167
4.1 Objectifs du TP 167

4.2 Stabilité linéaire - Equation de Lyapunov 167
4.2.1 Travail demandé 167
4.3 Interconnections de systèmes linéaires et stabilité 168
4.3.1 Travail demandé 168
4.4 Stabilité non linéaire, pendule simple 168
4.4.1 Travail demandé 169
4.5 Stabilité locale, exemple du fermenteur 169
4.5.1 Travail demandé 170
4.6 Travail à Remettre 171
4.6.1 Partie électronique 171
4.6.2 Compte-rendu 171

5 Commande par Retour d'Etat non Linéaire 173
5.1 Objectifs du TP 173
5.2 Commande linéarisante d'un moteur à courant continu 173
5.3 Linérisation exacte d'un joint flexible 174

Première partie

Notes de cours

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes non linéaires

1.1 Introduction

Afin de connaître le comportement et les performances d'un processus à commander, dans différentes situations, l'automaticien doit obtenir une description convenable de ce dernier. Cette étape est indispensable pour l'analyse, la simulation et synthèse de la commande du système. Dans la réalité, les systèmes physiques sont par nature extrêmement complexes. L'application stricte des lois de la physique conduirait à des modèles très lourds et quasiment inutilisable par un automaticien. Pour surpasser cet obstacle, l'automaticien doit faire une série d'hypothèses, justifiés par des considérations pratiques, pour aboutir à un modèle de complexité convenable qui lui permettra d'analyser analytiquement ces performances, et de concevoir un système de commande qui répond au cahier des charges. L'automatique linéaire par la puissance des outils qu'elle propose pour l'analyse et la conception de lois de commande nécessite de raisonner sur un modèle linéaire. Dans la réalité, tout les systèmes sont non linéaires, et l'utilisation de modèles linéaire est justifiée par la faible gamme de variation du point d'équilibre du système. Afin de proposer des lois de commandes plus performantes, d'interpréter des phénomènes que les modèles linéarisé des système ne peuvent pas interpréter, l'automatique non linéaire travaille directement sur le modèle non linéaire du système. Ce chapitre aura pour objectif de définir clairement ce qu'est un système non linéaire, de rappeler puis de généraliser certaines notions définies pour les systèmes linéaire aux système non linéaire, comme la notion de représentation d'état puis d'exposer certaines particularités des systèmes non linéaires par rapport aux systèmes linéaires.

1.2 Rappels sur les Systèmes

Définition 1.1 (Système Physique-Processus) *Un **système physique** (processus) est un ensemble d'éléments reliés les uns aux autres afin de former un tout et de réaliser un certain objectif.*

Le comportement d'un système physique est décrit par un ensemble de grandeurs physiques appelées *variables technologiques* ou *coordonnées* [4]. Ces variables peuvent être divisées en deux :

1. **Les variables d'entrée :** Ce sont les grandeurs physiques qui permettent d'agir sur le comportement du système. Elle ne dépendent pas des conditions de fonctionnement du système. Les variable d'entrées seront désignées par le vecteur $\boldsymbol{u}(t)$ qui est une fonction du temps.
2. **Les variables de sortie :** Ces variables dépendent des grandeurs d'entrée et du régime de fonctionnement du système. Les variable d'entrées seront désignées par le vecteur $\boldsymbol{y}(t)$.

Définition 1.2 (Système Dynamique) *Un* système dynamique *est un modèle de processus physique évoluant dans le temps, donné sous forme d'*équations différentielles ordinaires *ou* aux dérivées partielles*, reliant les différentes variables décrivant le phénomène. Ces équations sont appelées* équations d'évolution *[5].*

Le système $\mathcal{S}$ joue donc le role d'opérateur qui transforme les variables d'entrée $\boldsymbol{u}(t)$ en variables de sortie $\boldsymbol{y}(t)$.

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathcal{S}\left(\boldsymbol{u}(t)\right) \tag{1.1}$$

Ainsi, le système peut être représenté par le schéma bloc suivant :

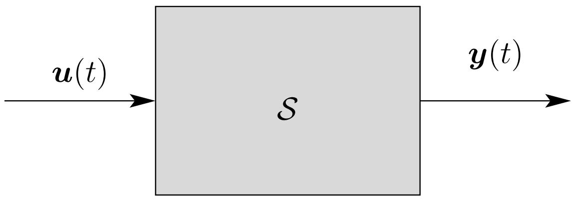


Figure 1.1 – Schéma bloc d'un système.

Remarque 1.1 *Dans la suite de ce document, afin d'alléger le contenu, on utilisera le mot système pour désigner un système dynamique.*

1.3 Classification des Systèmes

Selon la particularité des signaux d'entrée et de sortie et les propriétés de l'opérateur (S) qui les relient, les systèmes sont classés en plusieurs classes : Linéaires, non linéaires, continus, discrets, stationnaires, non stationnaires, statiques, dynamiques, déterministe, stochastique, à paramètres localisés ou distribués [4]. De plus, chaque classe ou sous-classe de systèmes peut être divisé en fonction des autres classes. On citera ici brièvement les principales propriétés permettant de classifier les systèmes.

Système Déterministe : Un système est *déterministe* si pour une valeur donnée de l'entrée $\boldsymbol{u}$, il n'y a qu'une valeur possible de la sortie $\boldsymbol{y}$, et ***Stochastique*** sinon ;

Système Causal : Un système est *causal* si sa sortie à l'instant t, $\boldsymbol{y}(t)$, ne dépend que des valeurs précédentes (antérieurs) de l'entrée ; *i.e.* $\boldsymbol{u}(\tau)$ pour $\tau \leq t$;

Système Stationnaire : Un systèmes est *stationnaire* ou *invariant par rapport au temps* si les paramètres du systèmes sont constants (ne varient pas dans le temps). Ceci est équivalent à dire que si $\boldsymbol{y}(t)$ est la sortie du systèmes pour l'entrée $\boldsymbol{u}(t)$, alors la réponse du système à l'entrée $\boldsymbol{u}(t-\tau)$ sera $\boldsymbol{y}(t-\tau)$.

Système à paramètres localisés : Un système est à *à paramètres localisés* si sa dimension est finie, son comportement est régis par des *équations différentielles ordinaires*. Sinon, il est à ***paramètres distribués***, il est alors décrit par de *équations aux dérivées partielles*.

Système Statique : Un système est *statique* s'il est décrit par une équation différentielle de dimension nulle (ne faisant intervenir aucune des dérivées de $\boldsymbol{u}(t)$ et $\boldsymbol{y}(t)$), *dynamique* sinon.

Système Monovariable : Un système est *monovariable* si $u(t)$ et $y(t)$ sont scalaires, *multivariable* sinon [5]. On laissera la définition des systèmes linéaires et non linéaires à la section suivante après avoir rappeler le principe de superposition.

On peut proposer le diagramme suivant pour une classification possible des systèmes dynamiques

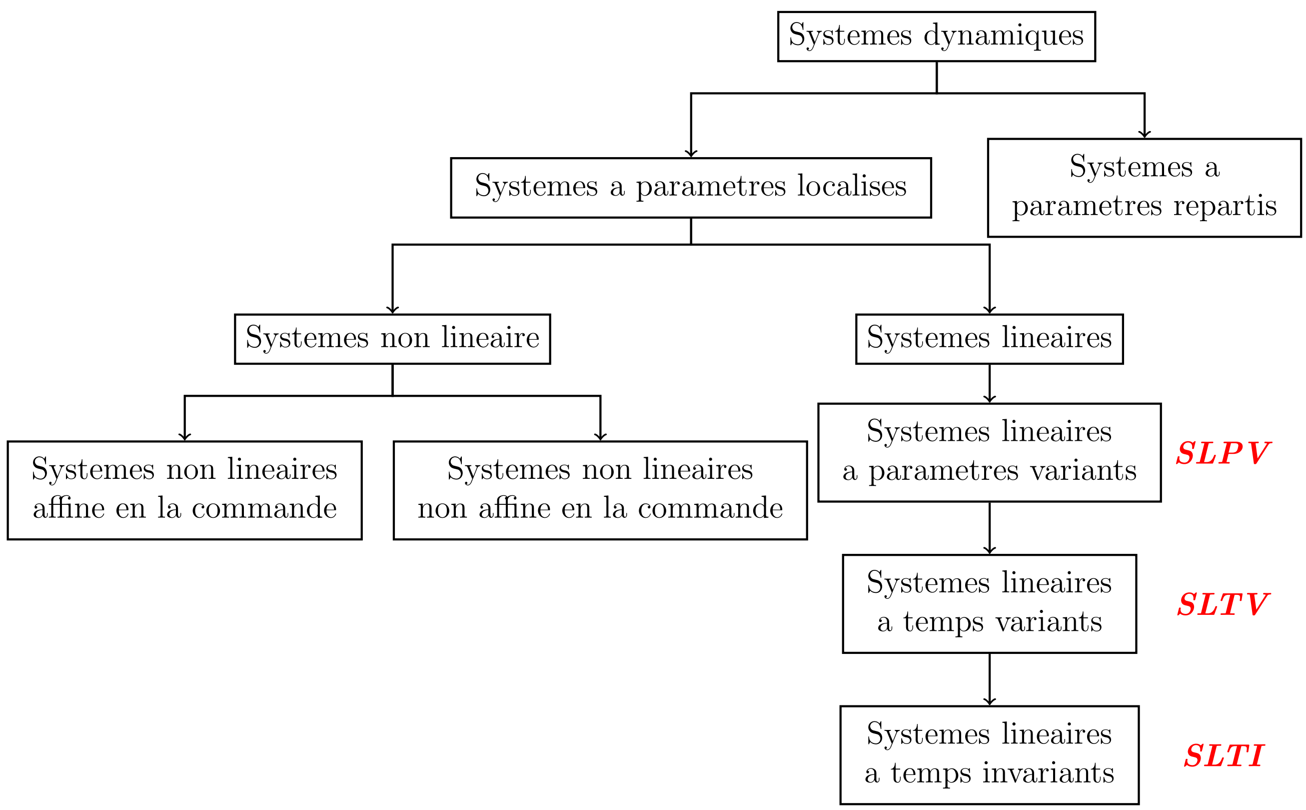


Figure 1.2 – Classification des système dynamiques

1.4 Systèmes linéaires-Systèmes non linéaires

1.4.1 Principe de proportionnalité

sortie du système ($\mathcal{S}$) à l'entrée $\boldsymbol{u}(t)$. On dit que ce système répond à la *condition de proportionnalité* si sa sortie à un signal d'entrée $k\boldsymbol{u}(t)$ est le signal $k\boldsymbol{y}(t)$. Ceci est illustré par la figure 1.3

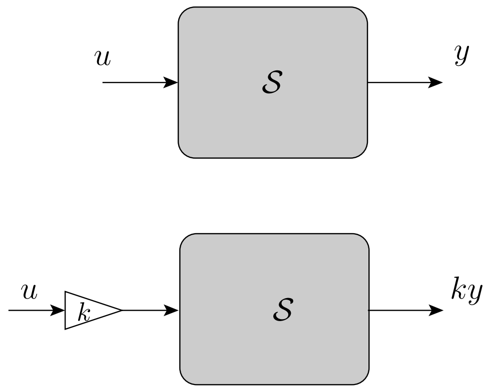


Figure 1.3 – Principe de proportionnalité.

1.4.2 Principe de superposition

Soient $\{\boldsymbol{y}_1(t), \ldots, \boldsymbol{y}_r(t)\}$ les sorties du système $\mathcal{S}$ respectivement aux entrées $\{\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_r(t)\}$ appliquées séparément. On dit que ce système répond au *principe de superposition* si sa sortie à la somme pondérées de ces entrées $\sum_{i=1}^{r} a_i\boldsymbol{u}_i(t)$ est égale à la sommes pondérées par les mêmes coefficients des sorties obtenues précédemment $\sum_{i=1}^{r} a_i\boldsymbol{y}_i(t)$, soit

$$\mathcal{S}(\sum_{i=1}^{r} a_i\boldsymbol{u}_i(t)) = \sum_{i=1}^{r} a_i\mathcal{S}(\boldsymbol{u}_i(t)) = \sum_{i=1}^{r} a_i\boldsymbol{y}_i(t), \forall a_i \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Le comportement d'un système $\mathcal{S}$ vérifiant le principe de superposition est décrit par la figure 1.4

1.4.3 Superposition dans le cas multivariable

Si un système multivariable, possédant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties vérifie le principe de superposition, on peut étudier son comportement en annulant des entrées choisies puis en combinant l'effet de toutes les entrées ensemble. La figure 1.5 représente un système avec retour unitaire en présence d'une perturbations $v_u(t)$ sur la commande.

Ce système possède deux entrées : La consigne $y_c(t)$ et la perturbation de la commande $v_u(t)$. Il possède une seule sortie $y(t)$. Vu ainsi, il s'agit d'un système MISO (Multi Input Single Output). Comme le correcteur $C(s)$ et le processus $G(s)$ sont linéaires, le système en boucle fermée est également linéaire. Ainsi, il vérifie le principe de superposition. On

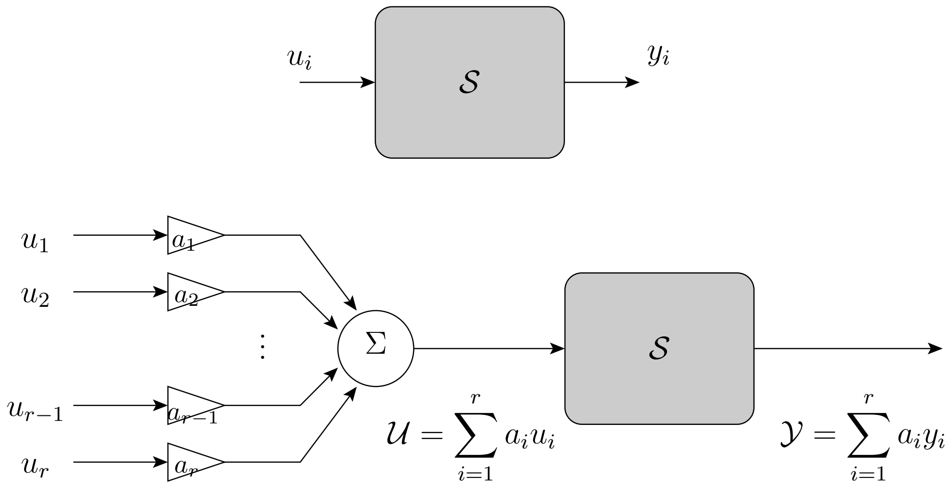


Figure 1.4 – Principe de superposition.

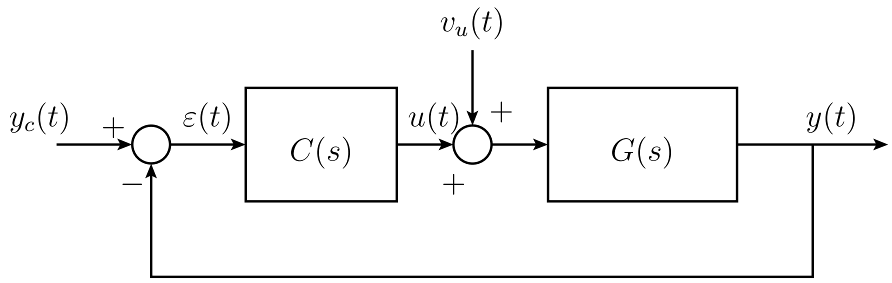


Figure 1.5 – Régulation et poursuite.

peut alors étudier l'effet de la consigne $y_c(t)$ et de la perturbation de la commande $v_u(t)$ séparément.

Etude en régulation : L'étude d'un système en régulation revient à étudier sa capacité à rejeter l'effet de perturbations externes. On annule alors la consigne, *i.e.* $y_c(t) = 0$ et on applique une perturbation $v_u(t)$.

Etude en poursuite : Dans ce cas, on étudie la capacité du système à poursuivre une consigne $y_c(t)$ variable en fonction du temps. On parle également d'*asservissement.* Dans ce cas, on annule la perturbation $v_u(t)$ et on applique une consigne variable $y_(t)$.

Maintenant qu'on a étudié les deux effet séparément, la sortie du système en présence d'une perturbation et d'une consigne variable est la somme de ces réponses obtenues si on applique chacune séparément. Ceci est valable seulement dans le cas linéaire où on peut séparer l'étude de la régulation et la poursuite.

1.4.4 Systèmes linéaires

Définition 1.3 (Système Linéaire) *Un* système linéaire *est un système qui vérifie le principe de superposition. Son comportement est décrit par une équation (ou un système d'équations) différentielle linéaire.*

Remarque 1.2

1. *Les coefficients de l'équation différentielle linéaire décrivant le comportement d'un système linéaire peuvent êtres constants où variables.*
2. *Dans le cas où ces coefficient sont constants (indépendant du temps), le systèmes est stationnaire, il est également appelés système* ***Linéaire à Temps Invariant*** *(LTI).*
3. *Dans le cas où ces coefficient sont variables, le systèmes est dit* ***Linéaire à Paramètres Variables*** *(LPV) ou non stationnaire.*

Exemple 1.1 (Système linéaire du premier ordre) *On rappel qu'un SLTI (système linéaire à temps invariant) du premier ordre est décrit par une équation différentielle de la forme suivante*

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{1.3}$$

Le gain statique k et la constante de temps τ sont donnée par

$$k = \frac{b_0}{a_0}; \quad \tau = \frac{a_1}{a_0}$$

Exemple 1.2 (Système linéaire du second ordre) *Un système du second ordre est régit par une équation différentielle linéaire de la forme*

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u \tag{1.4}$$

Le terme en $\dot{u}$ intervient rarement. La fonction de transfert normalisée d'un système du second ordre est

$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{1.5}$$

Les coefficient a_i et b_i de l'équation différentielle sont reliés aux caractèristiques du système par les relations suivantes

$$k = \frac{b_0}{a_0}, \ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \ \ \xi = \sqrt{\frac{1}{a_0 a_2}} \frac{a_1}{2}$$

où k est le ***gain statique****, ω_0 la* ***pulsation propre*** *et ξ le* ***facteur d'amortissement****.*

Le système régit par l'équation différentielle

$$3\frac{dy^2(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 8u(t) \tag{1.6}$$

est du second ordre. Il est linéaire stationnaire.

Exemple 1.3 (Système linéaire stationnaire d'ordre n) *Le comportement d'un SLTI d'ordre n est décrit par l'équation différentielle suivante*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{(i)}{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i \overset{(i)}{u}(t) \tag{1.7}$$

$\overset{(i)}{y}(t)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $y(t)$ par rapport au temps, ie $\overset{(i)}{y}(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$. Le système est dit propre *(physiquement réalisable) si $n \geq m$. Il est* strictement propre *si $n > m$.*

Exemple 1.4 (Système linéaire à coefficients variables) *Le système régit par l'équation différentielle*

$$5\cos(t)\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 10u(t) \tag{1.8}$$

est linéaire à coefficients variables (non stationnaire).

De façon générale, tout système décrit par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t) \overset{(i)}{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i(t) \overset{(i)}{u}(t) \tag{1.9}$$

où $a_i(t)$ et $b_i(t)$ sont des fonction de la variables indépendante t qui représente le temps sont linéaires non stationnaires.

1.4.5 Systèmes non Linéaires

Définition 1.4 (Système Non Linéaire) *Un* Système non linéaire *est un système qui ne vérifie pas le principe de superposition. Son comportement est décrit par une équation (ou un système d'équations) différentielle non linéaire.*

Exemple 1.5 (Système non linéaire) *Le système régit par l'équation différentielle*

$$\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + 5y(t) = 6u(t) \tag{1.10}$$

est non linéaire à cause du terme $\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2$ qui est non linéaire [4].

Exemple 1.6 (Véhicule sous-marin) *Le comportement simplifié d'un véhicule sous-marin peut être décrit par [1]*

$$\dot{v} + |v|\, v = u \tag{1.11}$$

où v est la vitesse du véhicule et u l'entrée de commande (la poussée de l'hélice). La non linéarité $|v|\, v$ correspond à une loi au carré classique de la traînée. On applique une poussée u en échelon, suivie 5s *après par une entrée négative en échelon. On observe que le système réagit plus rapidement au premier échelon positif qu'à l'échelon négatif qui a suivi. Ceci peut être expliqué par le fait que le coefficient d'atténuation $|v$ est plus important aux vitesses élevées qu'aux vitesses faibles.*

Si on excite le système avec des échelons plus importants, d'amplitude 10 *par exemple, le temps de réaction est plus important que dans les deux cas précédents. De plus, la réponse en régie permanent n'est pas égale à* 10 *fois la réponse du véhicule à l'échelon unité. Le principe de superposition ne s'applique donc pas comme dans le cas linéaire Ceci peut être déduit en raisonnant en régime permanent*

$$\begin{array}{lclcl} u = 1 & \Rightarrow & 0 + |v_s|\, v_s = 1 & \Rightarrow & v_s = 1 \\ u = 10 & \Rightarrow & 0 + |v_s|\, v_s = 10 & \Rightarrow & v_s = \sqrt{10} \approx 3.2 \end{array}$$

1.5 Représentation d'État d'un Système Linéaire

1.5.1 Rappel sur la notion d'état

Les ***variables d'état*** d'un systèmes dynamiques sont un ensemble de variables intermédiaires dans la description de la relation entre les variables d'entrée $\boldsymbol{u}(t)$ et les variables de sortie $\boldsymbol{y}(t)$. Elles sont désignées par $\boldsymbol{x}(t)$ et dépendent du temps. Ces variables donnent des informations sur l'état internes du système. Pour cette raison elles sont encore appelées *variables internes*. Une représentation d'un système faisant intervenir des variables d'état est appelé *représentation ou modèle d'état* (ou représentation interne). Une représentation faisant uniquement intervenir les variables d'entrée et de sortie est appelée *représentation entrée-sortie* (ou *représentation externe*).

Définition 1.5 (état d'un système) *L'* état *l'un système dynamique est un ensemble de variables qui, connues à un instant donné, permettent de décrire l'évolution du système les instants suivants. Le vecteur d'état représente en pratique la mémoire du système ou l'évolution des conditions initiales.*

1.5.2 Système linéaire à temps invariant (SLTI)

La forme générale d'une représentation d'état dun SLTI est donnée par

$$\begin{array}{rcll} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) & \text{(Equation d'état)} \\ \boldsymbol{y}(t) & = & C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) & \text{(Equation de sortie)} \end{array} \tag{1.12}$$

avec

$$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad , \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m \quad , \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

et

$$A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad , B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad C \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, \quad D \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p,$$

Exemple 1.7 (Pendule simple : Petites oscillations) *Soit le pendule simple décrit par l'équation de movement suivante*

$$ml^2\ddot{\theta} = -gml\sin\theta + \Gamma \tag{1.13}$$

en supposant que les les oscillations sont de faible amplitude, on réécrit cette équation comme suit

$$ml^2\ddot{\theta} = -gml\theta + \Gamma \tag{1.14}$$

0n pose $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta}\end{bmatrix}$*, on alors la représentation d'état linéaire suivante*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \Gamma \tag{1.15}$$

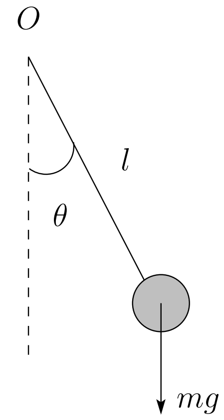


Figure 1.6 – Pendule simple.

1.5.3 Systèmes Linéaires à temps variant (SLTV)

Contrairement à un système LTI, les paramètres d'un linéaire à temps variant sont variables en fonction du temps t. Pour qu'un système soit LTV, il faut que ces paramètres interviennent de façon linéaire dans le modèle [6]. La représentation d'état d'un SLTV est donnée par

$$\begin{array}{rcll} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t) & \text{(Equation d'état)} \\ \boldsymbol{y}(t) & = & C(t)\boldsymbol{x}(t) + D(t)\boldsymbol{u}(t) & \text{(Equation de sortie)} \end{array} \tag{1.16}$$

1.5.4 Systèmes Linéaires à paramètres variables(SLPV)

Dans le cas de Systèmes Linéaires à paramètres variables(SLPV), les matrices de la représentation d'état dépendent d'un vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}(t)\ in\mathbb{R}^l$ variable dans le temps. ils sont décris par une représentation d'état de la forme suivante [6]

$$\begin{array}{rcll} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & A(\theta(t))\boldsymbol{x}(t) + B(\theta(t))\boldsymbol{u}(t) & \text{(Equation d'état)} \\ \boldsymbol{y}(t) & = & C(\theta(t))\boldsymbol{x}(t) + D(\theta(t))\boldsymbol{u}(t) & \text{(Equation de sortie)} \end{array} \tag{1.17}$$

Les SLTV sont un cas spécial des SLPV dans le cas où le vecteur de paramètres variables dans le temps $\boldsymbol{\theta}(t)$ est égal au temps, *i.e.*

$$\boldsymbol{\theta}(t) = t, \quad l = 1$$

1.6 Représentation d'État d'un Système non Linéaire

Les systèmes non linéaires à dimension finie (à paramètres localisés) représente une large classe de systèmes non linéaires. L'application des lois physique pour l'obtention de modèles de connaissance des systèmes permet souvent d'aboutir à ce type de modèles [6].

1.6.1 Forme générale

La forme générale d'une représentation d'état d'un système non linéaire de dimension finie est donnée par les deux équations suivantes

$$\begin{array}{rcll} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right) & \text{(Equation d'état)} \\ \boldsymbol{y}(t) & = & \tilde{\boldsymbol{h}}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right) & \text{(Equation de sortie)} \end{array} \tag{1.18}$$

Dans le cas général, on considère un système à plusieurs entrées et plusieurs sorties (appelé encore MIMO pour Multi Inputs Multi Outputs).

On suppose que le système possède m entrées $u_i(t)$, n états $x_i(t)$ et p sorties $y_i(t)$. Les vecteurs d'entrée $\boldsymbol{u}(t)$, d'état $\boldsymbol{x}(t)$ et de sorties $\boldsymbol{u}(t)$ sont alors donné comme suit :

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ vecteur d'entrée} \quad ; \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ vecteur d'état;}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ vecteur de sortie} \quad ;$$

Les fonctions $\tilde{\boldsymbol{f}}$ et $\tilde{\boldsymbol{h}}$ sont définies comme suit

$$\tilde{\boldsymbol{f}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\boldsymbol{h}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$$

1.6.2 Système non linéaire affine en la commande

Cas monovariable (SISO) Le système possède une seule entrée $u(t) \in \mathbb{R}$, une seule sortie $y(t) \in \mathbb{R}$ et n états $\boldsymbol{x}(t) = [x_i(t), \cdots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$. Sa représentation d'état est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot u(t) \\ y(t) &= h(\boldsymbol{x}(t)) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Les fonctions $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ et h sont définies comme suit

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

Exemple 1.8 (Pendule simple : Cas général) *L'application du principe fondamental de la dynamique de rotation à la masse m du pendule simple permet d'aboutir à l'équation différentielle du second ordre de l'angle d'écartement θ par rapport à la verticale ; l'entrée de commande du pendule est un couple de module $\Gamma(t)$:*

$$ml^2\ddot{\theta} = -mlg\sin\theta + \Gamma(t) \tag{1.20}$$

Il s'agit d'un système monovariable non linéaire du second ordre. En choisissant comme vecteur d'état $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta}\end{bmatrix}^t$, on aboutit à la représentation d'état suivante :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}\Gamma \tag{1.21}$$

Cas multivariable (MIMO) Le système possède m entrées $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, n états $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ et p sorties $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^p$. Sa représentation d'état est donnée par [6]

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}(t)) \cdot u_i(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(t)) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Les fonctions $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ sont définies comme suit

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{g}_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

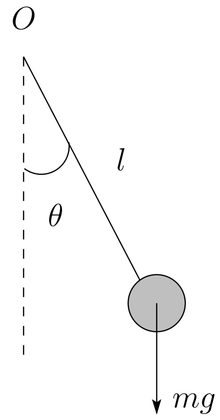


Figure 1.7 – Pendule simple : Cas général.

1.7 Quelques Spécificités des Systèmes Non Linéaires

Nous allons donner par la suite un ensemble de propriétés qui sont caractéristiques des systèmes non linéaire, ces propriétés n'apparaissent pas lors de la simulation d'un système linéaire et ne peuvent pas être interprétés par un modèle linéarisé d'un système non linéaire. On reviendra avec plus de détail sur certaines de ces propriétés lors des chapitres précédents.

1.7.1 Points d'équilibre isolés multiples

Contrairement à un système linéaire, un système non linéaire peut avoir plusieurs *points d'équilibre isolés*. Un point d'équilibre est un point où le système peut demeurer infiniment s'il n'est pas excité. Nous allons voir par la suite la définition exacte de cette notion. Ceci peut être vu dans les exemples suivants

Exemple 1.9 (Points d'équilibre multiples) *Soit le système non linéaire du premier ordre donné par*

$$\dot{x} = -x + x^2 \tag{1.23}$$

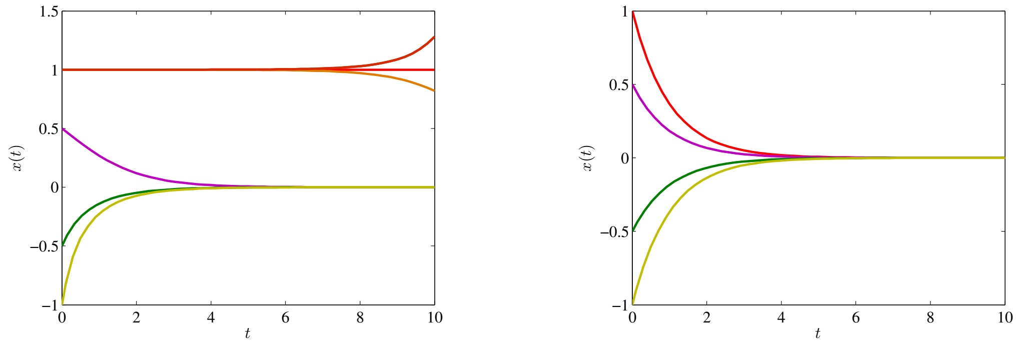
avec comme condition initiale $x(0) = x_0$. Son linéarisé autour de 0 est donné par

$$\dot{x} = -x \tag{1.24}$$

La solution de cette équation différentielle linéaire est $x(t) = x_0 e^{-t}$. Ce système a une unique point d'équilibre $x = 0$ quel que soit les conditions initiales. Par contre, en intégrant l'équation $dx/(-x + x^2) = dt$, la réponse du système non linéaire es donnée par

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

le système possède alors deux position d'équilibre $x = 0$ et $x = 1$. Sa réponse dépend fortement des conditions initiales. Comme le montre la figure 1.8, concernant la stabilité, le système linéarisé est stable quelque soit les conditions initiales. Par contre, pour le système non linéaire, une trajectoire amorcé avec une condition initiale $x_0 > 1$ divergera vers l'infini (instabilité), alors q'une trajectoire avec $x_0 < 1$ convergera vers le point d'équilibre $x = 0$.



(a) Système non linéaire (b) Système linéarisé.

Figure 1.8 – Réponse du système linéarisé et non linéaire.

1.7.2 Cycles limites

Un système non linéaire peut présenter des oscillations d'amplitude et période fixes sans excitation extérieure. Ces oscillation sont appelés *cycles limites*. Ce phénomène important peut être illustré par l'équation de Van der Pol

Exemple 1.10 *L'équation différentielle du second ordre non linéaire*

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \tag{1.25}$$

où m,c et k son des constantes positives. Il s'agit de l'équation de Van der Pol. Elle put être vue comme la description d'un système masse ressort avec u coefficient de frottement visqueux dépendant de la position de la masse $2c(x^2 - 1)$*, ou d'un circuit RLC avec une résistance non linéaire. Pour de grandes valeurs de* x*, le coefficient de frottement est positif, le système perd de l'énergie et converge vers l'équilibre. Pour de faibles valeurs de* x*, le coefficient de frottement est positif, et le frottement rajoute de l'énergie au système. Le système accélère et a tendance à diverger. Entre cette tendance à la divergence et la tendance à l'équilibre, le système présente des oscillations entretenues. Le cycle limite est ainsi entretenue en absorbant puis en fournissant de l'énergie à son environnement, à travers le coefficient de frottement. Ceci est différent d'un système masse-resort idéalisé (conservatif), où il n'y a pas d'échange d'énergie avec le milieu extérieur.*

Un système linéaire à la limite de la stabilité (marginalement stable) peut être le siège d'oscillations non amorties. C'est le cas d'un système masse-ressort où les frottements sont nuls. Le système possède alors au moins une paire de pôles conjugués imaginaires purs (sur l'axe imaginaire où à partie réelle nulle). Cependant, ces oscillations dans le cas linéaires sont différentes des cycles limites des systèmes non linéaires dans plusieurs points :

1. L'amplitudes des oscillation de cycles limites dans le cas non linéaire sont indépendantes des conditions initiales, contrairement à l'amplitudes des oscillations d'un système linéaire marginalement stable qui elles, dépendent des conditions initiales.
2. Les oscillations auto entretenues d'un système linéaire sont très sensibles aux variation de paramètres du système. Une faible variation des paramètres peut faire basculer le système linéaire dans la région stable ou instable. Les cycles limite ne sont pas aussi sensibles aux variations de paramètres.

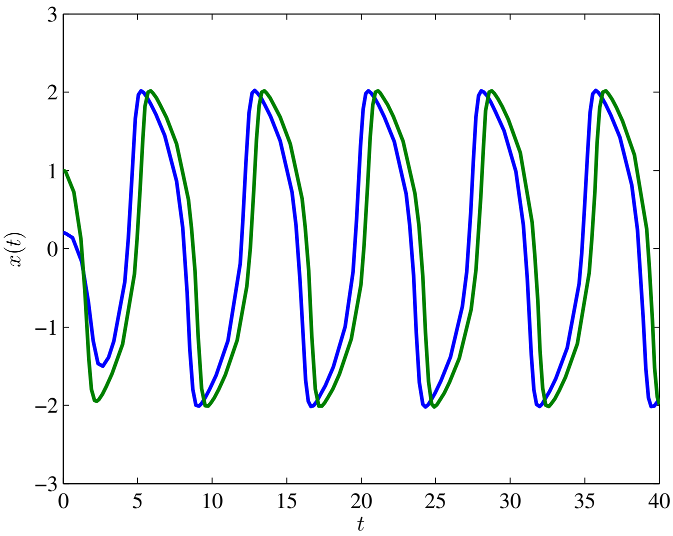


Figure 1.9 – Réponse d'un oscillateur de Van der Pol

Les cycles limites sont un phénomène très important qui apparaît dans plusieurs domaines : Les oscillation d'une aile d'avion suite aux interactions avec les forces aérodynamiques. Ils peuvent également apparaître dans les circuits électriques et électroniques.

1.7.3 Réponse indicielle disymétrique

Comme il ne respecte pas le principe de superposition, un système non linéaire peut présenter un comportement disymètrique comme nous l'avons vu dans le cas du véhicule sous marin. Si nous appliquons un échelon d'amplitude variable à l'entrée du système, le temps d'établissement peut varier en fonction de son amplitude. Pour la même amplitude, le temps de montée et de descente peut être différent (amplitude de même valeur et de signe différent).

1.7.4 Bifurcations

Si les paramètres d'un système non linéaire changent, la stabilité de ces point d'équilibre peut changer (come dans le cas d'un système linéaire), ainsi que le nombre de points d'équilibre. Les valeurs des paramètres pour lesquelles la nature qualitative de la trajectoire dud système change sont appelées *valeurs critiques de bifurcation*. Le phénomène de bifurcation concerne un changement quantitatif des paramètres du système menant à un changement qualitatif des propriétés du système. Il constitue l'objet de la théorie de bifurcations.

Exemple 1.11 (Bifurcation de Pitchfork) *Considérons le système décrit par l'équation de Duffing non amortie*

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = 0 \tag{1.26}$$

Si on représente les points d'équilibre e fonction de α*, en passant des valeur positive au valeurs négative,le point d'équilibre unique* $x = 0$ *s'éclate en trois points d'équilibre* $x_{e1} = 0, x_{e2} = \sqrt{-\alpha}, x_{e3} - \sqrt{-\alpha}$.

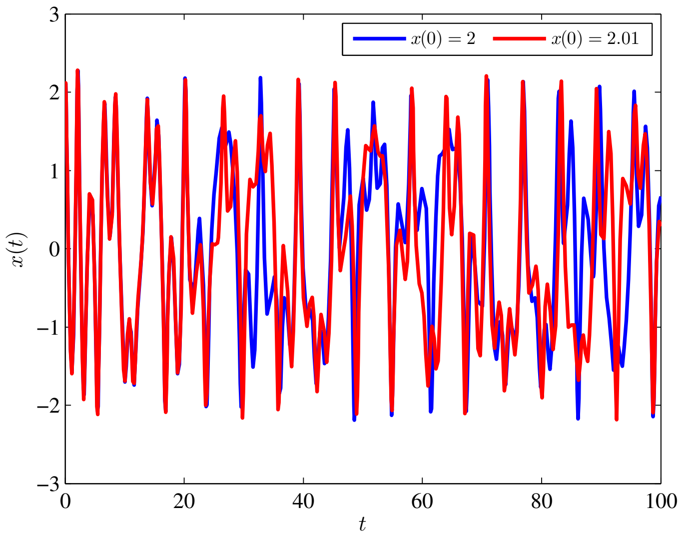


Figure 1.10 – Réponse d'un système chaotique

Ceci représente un changement qualitatif dans la dynamique, par conséquent, $\alpha = 0$ *est une valeur critique de bifurcation.*

1.7.5 Chaos

Pour un système linéaire stable, de faibles changement dans les conditions initiales résultent en de faibles changement dans la sortie. Les systèmes non linéaire peuvent présenter par contre un phénomène appelé **Chaos** à travers lequel la sortie du système est extrêmement sensible aux conditions initiales. La particularité essentielle du chaos est le caractère imprévisible de la sortie d'un système chaotique même si nous avons un modèle non linéaire exact et un ordinateur extrêmement puissant, la réponse du système après un horizon suffisamment grand ne peut pas être prédite. La notion de Chaos doit être distingués des système aléatoires. Dans le cas d'un système aléatoire, l'entrée du système et ses paramètres contiennent des incertitudes, par conséquent la sortie ne peut pas être exactement prédite. Dans le cas du chaos, le problème posé est déterministe.

Exemple 1.12 (Système chaotique) *Comme exemple de système chaotique, considérons le système décrit par l'équation suivante*

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6 \sin t \tag{1.27}$$

Concrètement il peut s'agir du modèle d'une structure mécanique faiblement atténués, subissant de grandes déflections élastiques et forcés par une excitation sinusoïdale. La réponse du système à es conditions initiales extrêmement proches, soit $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 3$ *puis* $x(0) = 2.01, \dot{x}(0) = 3.01$*. A cause de la présence de la non linéarité dure* x^5*, les deux réponses sont radicalment différentes après un certain temps.*

Le phénomène du chaos peut être observé dans plusieurs systèmes physiques. Les plus connus sont ceux reliés aux turbulences en mécanique des fluides et en dynamique atmosphérique (météorologie).

1.8 Exercices

Exercice 1.1

Classer les systèmes donnés par les représentations ci-dessous dans le Tableau **??** en indiquant les propriétés qu'ils vérifient. $u(t)$ est l'entrée du système, $\boldsymbol{x}(t)$ le vecteur d'état et $y(t)$ est la sortie

(a) $\dot{y}(t) = u(t) + 1$

(b) $\dot{y}(t) = (5t+2)u(t) - 3$

(c) $y(t) = 5u(t)$

(d) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = u^2(t)$

(e) $\ddot{y}(t) + (3t^2+t)y(t) = 5\dot{u}(t) + u(t)$

(f) $\overset{(3)}{y}(t) + \dot{y}^2(t) = 3u(t)$

$$(g)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$(h)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = (2t+1)x_1 + u \\ \dot{x}_2 = (t^3-2)x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

$$(i)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - 2u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$(j)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$(k)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = (3t+7)x_2^3 \\ \dot{x}_2 = 7x_1 - 4 + 3u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$(l)\quad \begin{cases} x_1 = (3t+7)x_2 + x_1 \\ x_2 = 7x_1 - 4 + 3u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Système	Non linéaire	Stationnaire	Dynamique	Multivariable
(a)				
(b)				
$\vdots$				

Table 1.1 – Classification des systèmes.

Exercice 1.2

On considère un système linéaire monovariable à temps variant décrit par l'équation différentielle linéaire suivante

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\overset{(i)}{y}(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\overset{(j)}{u}(t) \tag{1.28}$$

Démontrer que ce système vérifie le principe de superposition.

Exercice 1.3

Plusieurs systèmes physiques peuvent êtres décrits par une équation différentielle d'ordre n de la forme

$$\overset{(n)}{y} = g(t, y, \dot{y}, \cdots, \overset{(n-1)}{y}, u)$$

Où u et y sont des grandeurs scalaires, avec u comme entrée et y comme sortie.

Donner une représentation d'état de ce modèle.

Exercice 1.4

Soit le système SISO décrit par l'équation différentielle suivante

$$\overset{(n)}{y} = g_1(t, y, \dot{y}, \cdots, \overset{(n-1)}{y}, u) + g_2(t, y, \dot{y}, \cdots, \overset{(n-2)}{y})\dot{u} \tag{1.29}$$

où u est l'entrée et y la sortie du système.

Trouver une représentation d'état de ce système.

Indication : Prendre $x_n = \overset{(n-1)}{y} - g_2(t, y, \dot{y}, \cdots, \overset{(n-2)}{y})u$.

Exercice 1.5

Soit le circuit à diode tunnel représenté sur la figure 1.11 :

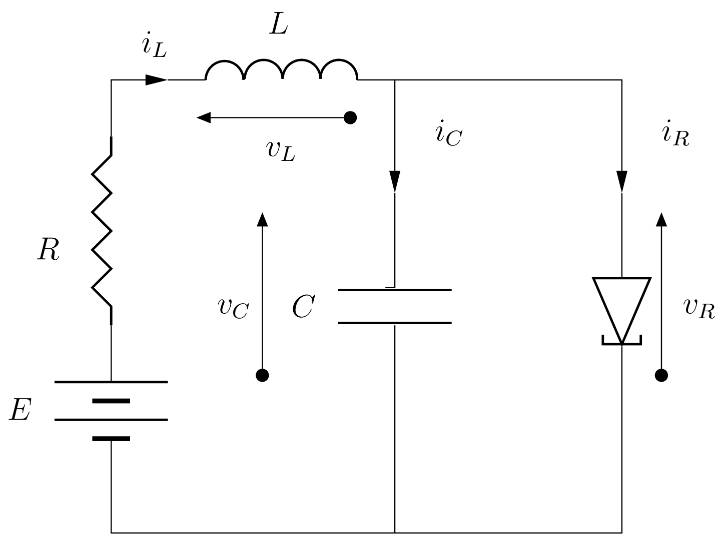


Figure 1.11 – Circuit à diode tunnel.

La diode tunnel est définie par la caractéristique tension-courant $i_R = h(v_R)$. On suppose que la capacité et l'inductance ont un comportement linéaire.

1. Écrire les équations électriques du circuit,
2. En choisissant comme variables d'état $x_1 = v_C$ et $x_2 = i_L$, comme entrée $u = E$, écrire la représentation d'état du système,
3. Le point d'équilibre du circuit vérifie la relation $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. La caractéristique de la diode tunnel est donnée sur la Figure 1.12 Montrer que les points d'équilibre sont les racines d'une équation algébrique non linéaire.
4. Résoudre graphiquement cette équation en utilisant la caractéristique de la diode tunnel.

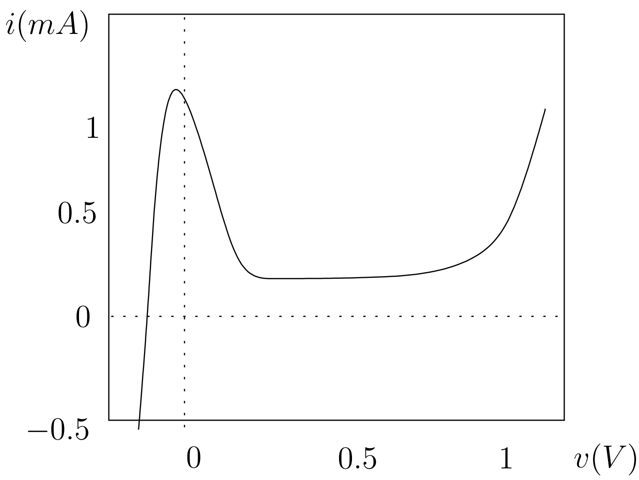


Figure 1.12 – Caractéristique de la diode tunnel.

Exercice 1.6

Soit le circuit donné par la Figure 1.13 La capacité C et l'inductance L sont des

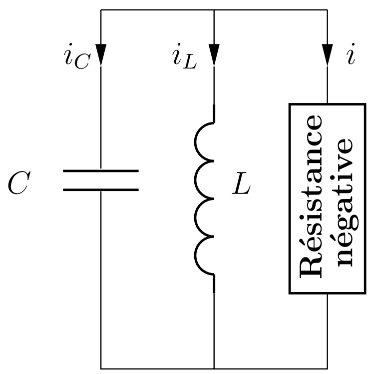


Figure 1.13 – Oscillateur à résistance négative.

constantes positives et invariables dans le temps. L'élément résistif est un circuit actif décrit par sa caractéristique tension-courant $i = h(v)$ donnée par la courbe de la figure 1.14 La fonction $h(.)$ satisfait les conditions suivantes :

$$h(0) = 0 \quad ; \quad h^{'}(0) < 0$$
$$\lim_{v \to -\infty} h(v) = -\infty \quad ; \quad \lim_{v \to +\infty} h(v) = +\infty$$

Une telle caractéristique peut être réalisée par exemple par une diode tunnel.

1. En utilisant les lois des circuits électriques, écrire l'équation différentielle qui décrit le comportement du circuit avec la tension v comme variable de sortie,
2. En faisiant le changement de variable $t \to \tau = \dfrac{t}{\sqrt{LC}}$, montrer que cette équation différentielle est un cas spécial de l'équation de Liénard

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g(v) = 0,$$

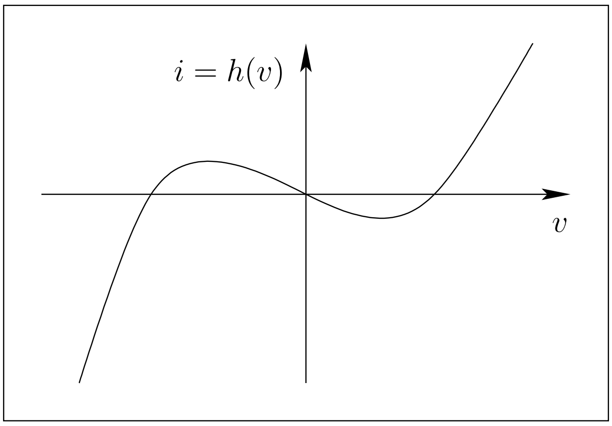


Figure 1.14 – Caractéristique de la résistance négative.

3. Identifier les fonctions $f(v)$ et $g(v)$,
4. On suppose maintenant que $h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$. Montrer que l'équation du circuit s'écrit alors :
$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$$
Déterminer la valeur de ε,
5. Donner la représentation d'état du circuit en choisissant $x_1 = v$ et $x_2 = \dot{v}$ comme variables d'états,
6. Donner maintenant la représentation d'état du circuit en choisissant $z_1 = i_L$ et $z_2 = v_c$ comme variables d'états (voir Figure 1.13),
7. Montrer que l'on peut effectuer le passage à la deuxième représentation d'état par la transformation d'état suivante
$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} -h_1(x_1) - (1/\varepsilon)x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.7

Les équations dynamiques non linéaires d'un robot manipulateur à une seule jointure sont données par :
$$\begin{aligned} &I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ &J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{aligned} \tag{1.30}$$
où q_1 et q_2 sont les positions angulaire, I et J les moments d'inertie, k la constante de torsion, M la masse totale, L la distance et u le couple de commande.

Choisir les variables d'état et écrire une représentation d'état pour ce robot.

Exercice 1.8

Le pendule inversé, ou chariot équilibriste, est le système mécanique représenté sur la figure 4.2

1. Calculer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système en fonction des notations du schéma de la Figure 4.2,

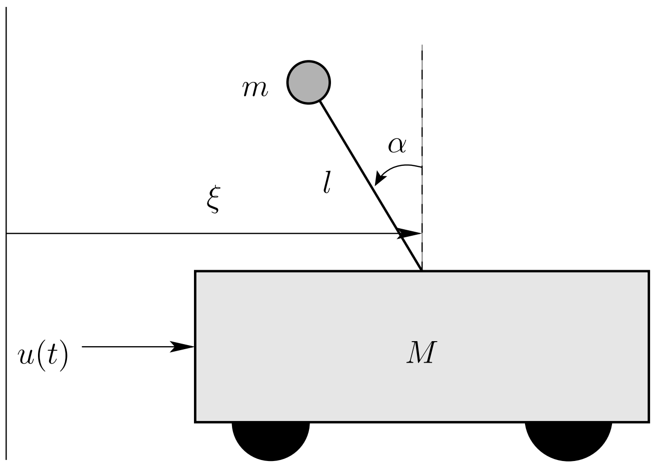


Figure 1.15 – Pendule inversé.

2. Calculer le Lagrangien $L = T - V$ en considérant (ξ, θ) comme variables Lagrangiennes,
3. Décrire les équations du mouvement en utilisant les équations d'Euler-Lagrange,
4. En choisissant $\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}$ comme variables d'état, donnez une représentation d'état du système.

Chapitre 2

Plan de Phase, Bifurcations

2.1 Introduction

La méthode du plan de phase est une méthode graphique utilisée pour l'étude des solutions d'une équation différentielle non linéaire du second ordre [7]. Le principe de cette méthode est de visualiser les solutions de l'équation différentielle dans le plan [8]. Elles correspondent aux trajectoires d'un système du second ordre pour différentes conditions initiale [1].

Cette technique présente plusieurs avantages : D'abord, elle permet de déduire des informations qualitatives sur le comportement du système (stabilité, cycles limites) à partir de l'analyse de ses trajectoires. Ceci se fait sans résoudre l'équation différentielle qui le décrit son comportement. De plus, elle s'applique aux non linéarité dures. Enfin, beaucoup de systèmes physiques peuvent être simplifiés pour être représenté par un système du second ordre, ce qui permet d'utiliser la méthode du plan de phase pour leur analyse [1].

Cette méthode peut se généraliser à l'espace de phase (dimension > 2), cependant la visualisation pose problème [1, 8].

2.2 Généralités-Définitions

Soit le système non linéaire autonome du second ordre

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour une condition initiale donnée $\boldsymbol{x}_0 = (x_1(0), x_2(0))$, le système du second ordre admet une solution $\boldsymbol{x}(t)$.

Une grande partie des systèmes non linéaires du second ordre peuvent êtres décris par une équation différentielle de la forme suivante [9, 1] :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{2.2}$$

En choisissant comme variables d'état

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

la forme d'état non linéaire de ce système est

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

qui est un cas spécial du cas général présenté par l'équation 2.1.

Définition 2.1 (Variables de phase-Plan de phase) *Les variables d'état* x_1, x_2 *du système non linéaire du second ordre sont également appelées* ***variables de phase****. Le plan de coordonnées* (x_1, x_2) *qui constitue l'espace d'état du système du second ordre est appelé* ***plan de phase****.*

Définition 2.2 (Trajectoire de phase) *On appel* ***trajectoire de phase*** *la représentation dans le plan de phase, pour une condition initiale donnée* $\boldsymbol{x}_0 = (x_1(0), x_2(0))$ *de la solution de l'équation différentielle du système du second ordre. Il s'agit d'une courbe paramètrée par* t *pour* t *allant de* 0 *à l'infini.*

Définition 2.3 (Portrait de phase) *Le* ***portrait de phase*** *est l'ensemble des trajectoires de phase du système du second ordre pour différentes conditions initiales.*

Exemple 2.1 *(Système masse-ressort [7]) Soit l'équation différentielle du mouvement d'une masse* 1 *reliée un ressort de raideur* 1

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \tag{2.4}$$

à partir d'une position initiale x_0*. On montre que les solutions de cette équations sont de la forme*

$$x(t) = x_0 \cos(t) \tag{2.5}$$

en choisissant $x_1(t) = x(t)$ *et* $x_2(t) = \dot{x}(t)$*,* ***l'équation paramétrique*** *des trajectoires de phase est*

$$\begin{cases} x_1(t) &= x_0 \cos(t) \\ x_2(t) &= -x_0 \sin(t) \end{cases} \tag{2.6}$$

ce qui conduit à une équation de la trajectoire dans le plan (x_1, x_2)

$$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 \tag{2.7}$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon dépendant de la condition initiale x_0

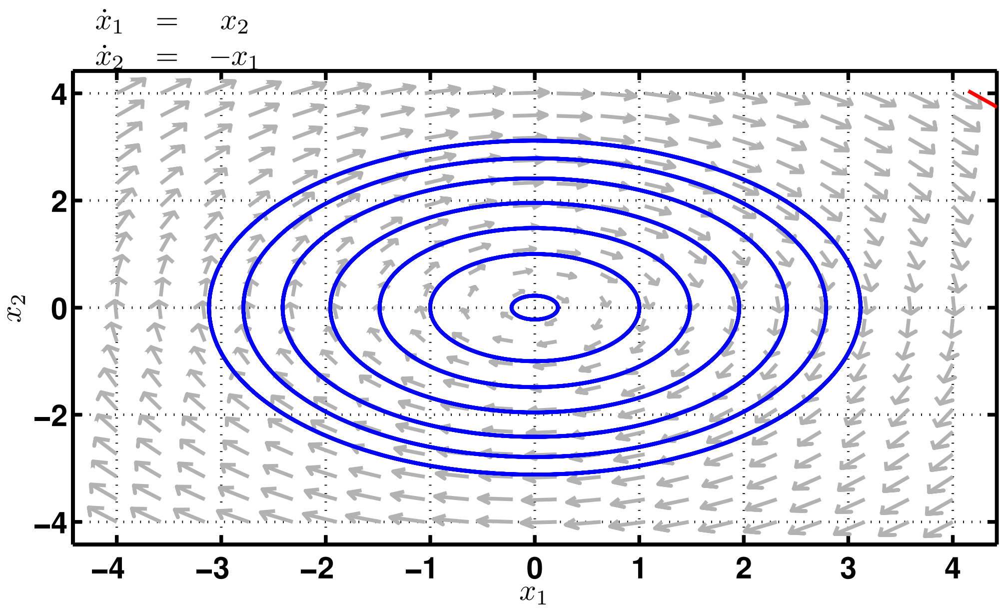


Figure 2.1 – Trajectoires de phase

2.3 Construction des trajectoires de phase

Le portrait de phase est obtenu en traçant des trajectoires à partir d'un grand nombre de conditions initiales différentes. On pourra par la suite faire des interprétations qualitatives du comportement du système autonome : Stabilité, cycles limites [7].

2.3.1 Quelques propriétés des trajectoires de phase

Soit le système non linéaire autonome du second ordre

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.8}$$

les trajectoires de ce système dans le plan de phase vérifient les propriétés suivantes [9] :

1. Elles croisent l'axe x_1 à angle droit.
2. Elles tournent toujours dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Par chaque point du plan de phase passe une trajectoire et une seule, sauf pour les **points singuliers** où on a $f_1(x_1, x_2) = 0$ et $f_2(x_1, x_2) = 0$.

Il existe de nombreuses méthodes pour le tracé des trajectoires de phase :

— Méthode analytique.

— Méthode des isoclines.

— Méthode delta.

— Méthode de Liénard.

— Méthode de Pell.

2.3.2 Méthode analytique

Elle utilise la solution analytique de l'équation différentielle. Elle est d'utilisation limité car il est nécessaire de connaître cette solution. Elle utilise deux techniques pour générer les trajectoires de phase (d'état)

Première technique

A partir de la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2, x_3) \end{cases}$$

On obtient les solutions temporelles pour chaque variable temporelle. Il s'agit d'une courbe paramètrée par t.

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(t) \\ x_2 &= g_2(t) \end{aligned}$$

En éliminant le temps entre ces deux solutions, on obtient l'équation de la trajectoire dans le plan de phase

$$g(x_1, x_2, t, C) = 0 \tag{2.9}$$

deuxième technique

on élimine directement le temps en posant

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

puis on résoud cette équation différentielle pour obtenir la relation entre x_1 et x_2 : $g(x_1, x_2, t, C) = 0$

2.3.3 Méthode des isoclines

Elle permet visualiser le portrait de phase sans avoir à résoudre analytiquement l'équation différentielle du second ordre [7].

Définition 2.4 (Isocline) ***Une isocline*** *est une courbe dans le plan de phase définie comme le lieu des points des trajectoires de phases de pente α donnée. Cette courbe est définie par une équation $s(x) = \alpha$ tel que*

$$s(x) = s(x_1, x_2) = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha \tag{2.10}$$

Une courbe isocline est définie par les points satisfaisant la relation [8]

$$f_2(x_1, x_2) - \alpha f_1(x_1, x_2) = 0 \tag{2.11}$$

Contrairement aux trajectoires, les isoclines sont assez facile à obtenir et permettent d'esquisser les trajectoires du système du second ordre [8] Cette méthode exploite le fait

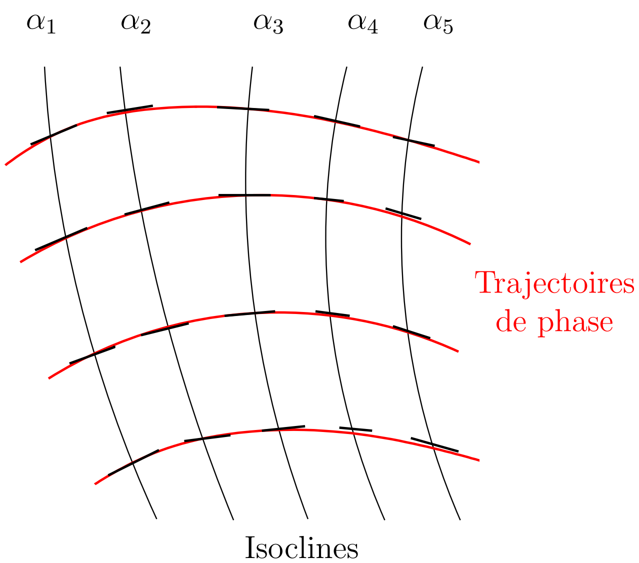


Figure 2.2 – Trajectoires de phase par la méthode des isocline.

que la pente de la trajectoire passant par le point (x_1, x_2) est donnée par :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \tag{2.12}$$

Les étapes de cette méthode sont les suivantes [7] :

1. Pour une valeur donnée de α, tracer la courbe isocline dans le plan (x_1, x_2).
2. Tracer le long de cette isocline des petits segments de droite de pente α.
3. Répéter l'opération pour différentes valeurs de α.
4. Une fois le plan de phase rempli d'isoclines, pour chaque condition initiale $\boldsymbol{x}_0 = (x_1(0), x_2(0))$, tracer la trajectoire en reliant les segments de droite entre eux.

Exemple 2.2 (Système du second ordre [7]) *Soit le système non linéaire du second ordre*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 \end{cases}$$

les isoclines sont alors définie par

$$s(x) = \frac{-\sin(x_1)}{x_2} = \alpha$$

soit,

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha}\sin(x_1)$$

Ce sont des sinusoïdes d'amplitude paramètrée par α

Exemple 2.3 (Equation de Van der Pol [1]) *Soit l'équation de van der Pol*

$$\ddot{x} + 0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{2.13}$$

une isocline de pente α est définie par

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x}{\dot{x}} = \alpha$$

Par conséquent, les points de la courbe

$$0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x + \alpha\dot{x} = 0$$

ont tous une pente α. Les isoclines et les trajectoire de phase de ce système sont représenté ci-dessous

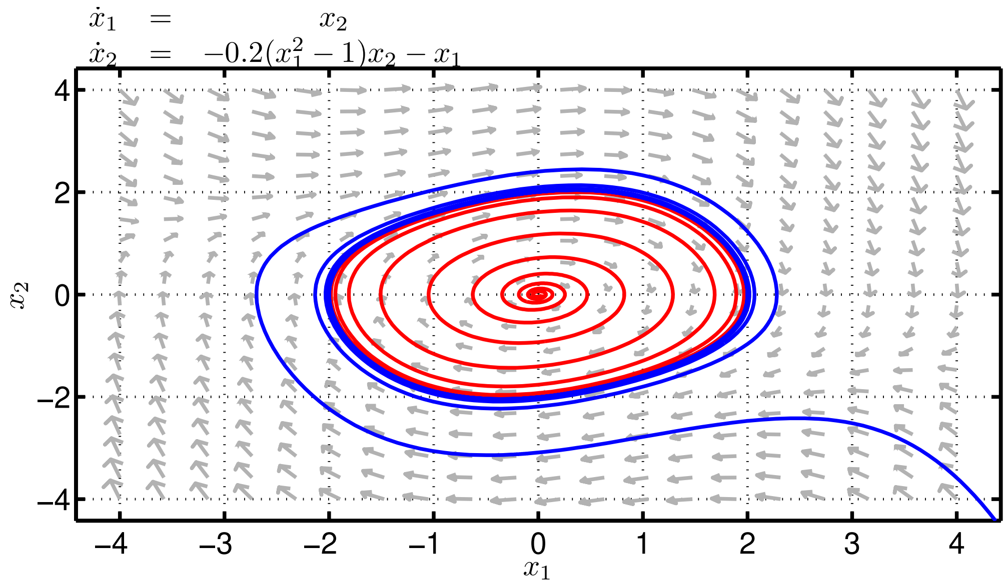


Figure 2.3 – Trajectoires de phase de l'équation de van der Hoven

Exemple 2.4 (Système linéaire simple [8]) *Soit le système linéaire simple suivant :*

$$\begin{array}{rcccl} \dot{x}_1 & = & f_1(x_1, x_2) & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & f_2(x_1, x_2) & = & -x_1 \end{array} \tag{2.14}$$

la pente des isoclines est alors

$$\alpha = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}$$

elles correspondent à des droites de pente α

$$x_1 + \alpha x_2 = 0$$

En fixant plusieurs valeurs de α, un ensemble d'isoclines est tracé. On peut alors avoir une idée des trajectoires de phase.

2.4 Etude des points singuliers

Définition 2.5 (Point singulier) *On appel **point singulier** la représentation d'un point d'équilibre dans le plan de phase. Il est également appelé **point stationnaire**. Il est définit par $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$, soit*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Remarque 2.1 *La pente d'une trajectoire $\alpha = \dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ n'est pas définie en un point singulier car $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$. Plusieurs trajectoires peuvent se croiser en ce point, d'où l'appellation de **point singulier**.*

2.4.1 Cas linéaire

Soit le système linéaire du second ordre

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \tag{2.15}$$

Il admet **un seul** point singulier **isolé** à l'origine O. L'analyse des valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice A permet de déterminer la nature de ce point singulier et l'allure du portrait de phase [8].

1. λ_1, λ_2 réels strictement négatifs $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Le point singulier est un **noeud stable**. En ce point, la solution n'est pas unique, car une infinité de trajectoires y passent.
2. λ_1, λ_2 réels strictement positifs $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$: Les trajectoires ont la même allure que précédemment, mais avec un sens de t croissant inversé. O est un **noeud instable**.
3. λ_1, λ_2 réels de signe opposé $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: O est alors instable. Il est appelé **point col**. La solution en O n'est pas unique, car deux trajectoires y passent
4. λ_1, λ_2 conjugués complexes à partie réelle strictement négative $\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega, h > 0$: Les trajectoires sont des spirales passant par O avec le sens de t croissant dirigé vers O qui est appelé **foyer stable**.

Valeurs propres	Nature du point singulier
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$; réels négatifs	Noeud instable
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$; réels positifs	Noeud stable
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$; réels de signe opposé	Col
$\lambda_{1,2} = \pm j\omega$; imaginaires purs	Centre
$\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega, h > 0$; complexes conjugués	Foyers stable
$\lambda_{1,2} = h \pm j\omega, h > 0$; complexes conjugués	Foyers instable

Table 2.1 – Points singuliers d'un système linéaire

5. λ_1, λ_2 conjugués complexes à partie réelle strictement positive $\lambda_{1,2} = h \pm j\omega, h > 0$: Les trajectoires sont des spirales. Pour un t croissant, on s'éloigne de O qui est un **foyer instable**.
6. λ_1, λ_2 imaginaires pures $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$: Les trajectoires sont une famille d'ellipses centrées en O qui est un **point centre**. En O, la solution n'existe pas.

2.4.2 Cas non linéaire

Comme pour la stabilité locale, le comportement qualitatif d'un système non linéaire peut être obtenu au voisinage d'un point singulier par linéarisation autour de ce point [7]. Les résultats seront valables localement. Soit le système non linéaire autonome du second ordre [8].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ce système peut avoir plus d'un point d'équilibre (point singulier).

Soit $x_e(x_e1, x_e2)$ un point singulier de ce système. Il vérifie

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

Soit,

$$f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_e$$

L'étude du comportement de ce système autour de ce point singulier pase par les étapes suivantes :

1. Changement de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = x_1 - x_{e1} \\ X_2 = x_2 - x_{e2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = F_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 = F_2(X_1, X_2) \end{array} \right.$$

2. Calcul du linéarisé tangent : $\dot{X} = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial X_1}\right|_{x=0} & \left.\frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial X_2}\right|_{x=0} \\ \left.\frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial X_1}\right|_{x=0} & \left.\frac{\partial F_2(x_1,x_2)}{\partial X_2}\right|_{x=0} \end{pmatrix}$$

3. Etude des propriétés du point singulier à l'origine $O(0, 0)$ du système linéarisé en se basant sur les résultats du cas linéaire :

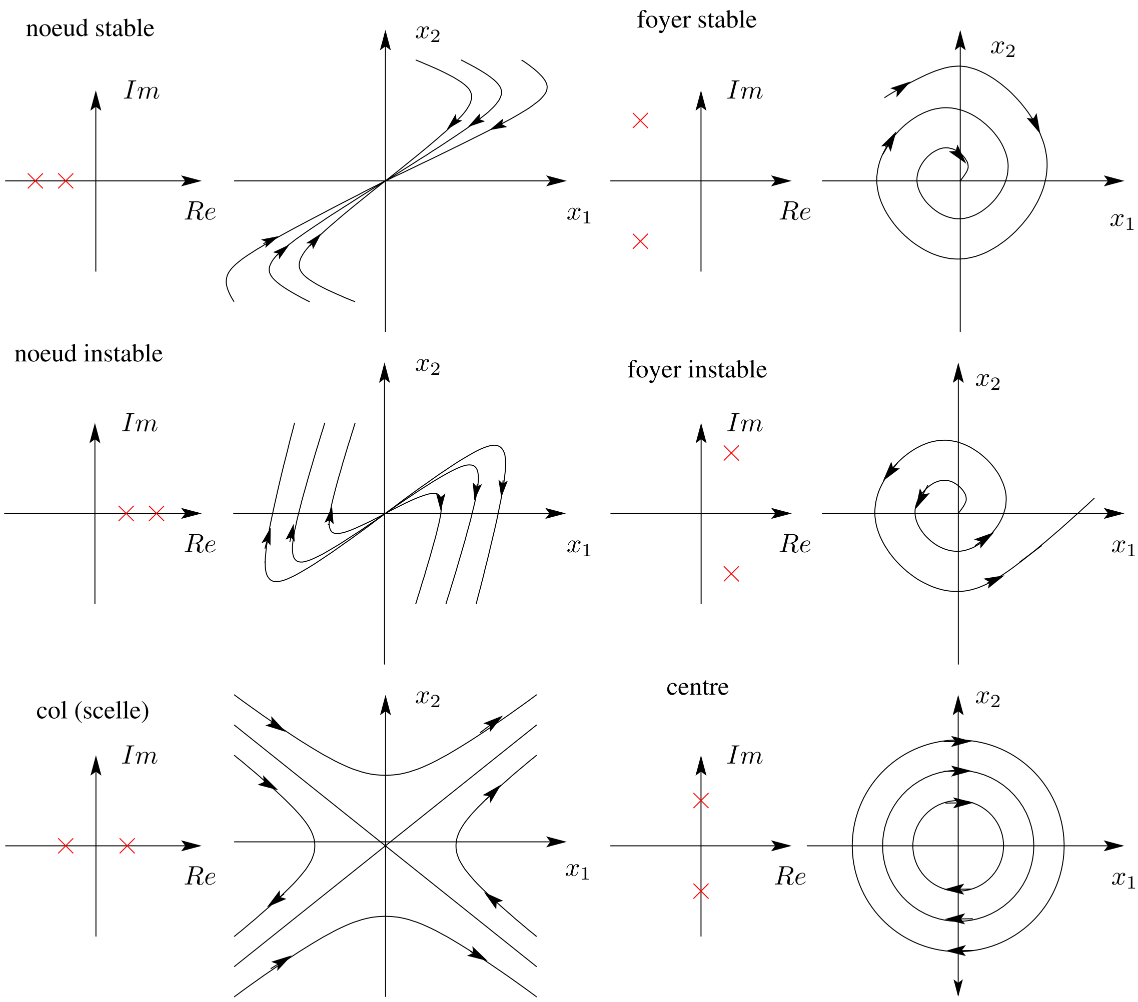


Figure 2.4 – Trajectoires de phase et points singuliers.

(a) Si $O(0,0)$ est un noeud stable, un foyer stable ou un point selle pour le linéarisé tangent, alors les trajectoires de phase du système non linéaire dans un voisinage du point d'équilibre x_e, se comportent comme celle associée à un noeud stable, un foyer stable ou un point selle.

(b) Si $O(0,0)$ est un noeud instable, un foyer instable, alors les trajectoires de phase du système non linéaire dans un voisinage du point d'équilibre x_e, se comportent comme celle asociée à un noeud instable, un foyer instable.

(c) Dans le cas ou linéarisé ngent possède au moins une valeur propre sur l'axe imaginaire $Re\{\lambda_i\} = 0$, le comprtement du système linéarisé et le comportement local du système non linéaire peuvent être très différents. Comme pour la stabilité locale, on ne peut rien conclure. C'est un **cas critique de Lyapunov**.

Exemple 2.5 () *Soit le système donné par*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{array} \right. \tag{2.17}$$

il a un point d'équilibre en 0. *Le linéarisé tangent a deux valeurs propres* $\pm j$. *Il s'agit* ***d'un centre****. En passant aux coordonnées polaires*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \end{array} \right.$$

la représentation d'état devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\mu r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

pour $\mu > 0$, le point d'équilibre sera un foyer stable et instable pour $\mu < 0$.

Exemple 2.6 (Equation de Duffing [10]) *Le mouvement d'une masse rappelée à sa position d'équilibre par un ressort exerçant une force de rappel non linéaire $f = -ky(1+\beta y^2)$ est décrit par l'équation différentielle suivante*

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + k(1+\beta y^2)y = 0$$

en posant $\alpha = 0.04$, $k = 1$ et $\beta = -0.5$, on obtient le modèle suivant

$$\ddot{y} + 0.04\dot{y} + y - 0.5y^3 = 0$$

en choisissant $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ comme variables d'état, on obtient la représentation suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 0.5x_1^3 - 0.04x_2 \end{aligned}$$

isoclines *L'équation des isoclines est définie par*

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-0.04x_2 - x_1 + 0.5x_1^3}{x_2} = \alpha$$

soit

$$x_2 = \frac{x_1(0.5x_1^2 - 1)}{\alpha + 0.04}$$

Points singuliers *Les points singuliers sont obtenus en résolvant le système*

$$\begin{cases} x_2 &= 0 \\ -x_1 + 0.5x_1^3 - 0.04x_2 &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne trois points singuliers

$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 0 \\ x_1 = \sqrt{2}, & x_2 = 0 \\ x_1 = -\sqrt{2}, & x_2 = 0 \end{cases}$$

Nature des points singuliers

$(x_1, x_2) = (0, 0)$: *L'équation caractéristique du linéarisé tangent est alors*

$$\lambda^2 + 0.04\lambda + 1 = 0$$

Le discriminant et la somme des racines de cette équation sont négatifs,ce qui donne deux racines complexes conjugués à partie réelle négative .Ce point singulier est donc un foyer stable.

$(x_1, x_2) = (\delta\sqrt{2}, 0)$: *avec* $\delta = \pm 1$. *En faisan le changement de variable*

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & x_1 - \delta\sqrt{2} \\ X_2 & = & x_2 \end{array}$$

on obtient la nouvelle représentation d'état

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & X_2 \\ \dot{X}_2 & = & -(X_1 + \delta\sqrt{2}) + 0.5(X_1 + \delta\sqrt{2})^3 - 0.04X_2 \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & X_2 \\ \dot{X}_2 & = & 2X_1 - 0.04X_2 + P(X_1, X_2) \end{array} \right.$$

$P(X_1, X_2)$ *contient les termes non linéaires en* X_1 *et* X_2. *L'équation caractéristique du linéarisé tangent est alors*

$$\lambda^2 + 0.04\lambda - 2 = 0$$

Elle a des racines réelles de signe opposés. Les point singuliers sont des cols.

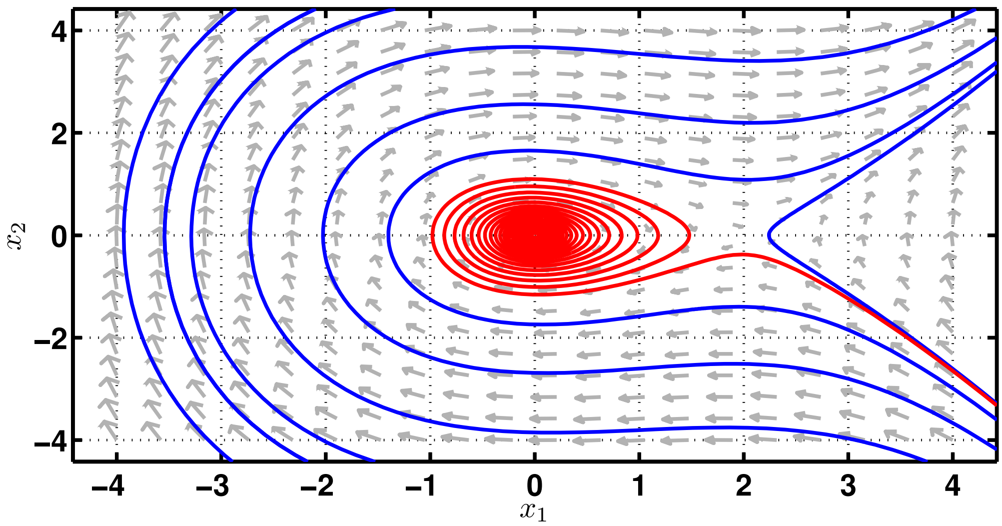


Figure 2.5 – Trajectoires de phase de l'équation de Duffing.

2.5 Cycles limites

Contrairement à un système linéaire autonome, un système non linéaire autonome peut être le siège d'oscillations qui ont les propriétés suivantes :

— Elles sont structurellement stables : Même avec un changement des paramètres du système, les oscillations peuvent être maintenues.

— L'amplitude des osicillation est indépendantes des conditions initiales.

ces oscillations sont appelées **cycles limites** et sont caractéristiques des systèmes non linéaires.

Définition 2.6 (Cycle limite) *Un cycle limite est défini comme une trajectoire fermée dans le plan de phase. Elle est associée à un comportement oscillatoire du système*

2.5.1 Classification des cycles limites

En fonction de l'évolution des trajectoires de phase au voisinage des cycle limites, ceux-ci peuvent êtres classés en trois catégories [1] :

Cycles limites stables : Toutes les trajectoires au voisinage du cycle convergent vers le cycle quand $t \to \infty$.

Cycles limites instables : Toutes les trajectoires au voisinage du cycle limite divergent quand $t \to \infty$.

Cycles limites semi-stables : Certaines trajectoires divergent d'autres convergent au voisinage du cycle limite quand $t \to \infty$.

Exemple 2.7 (Cycle limite stables, instables et semi-sables [1]) *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

en passant aux coordonnées polaires

$$\begin{cases} r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ \theta = \tan^{-1}(x_2/x_1) \end{cases}$$

la représentation d'état est transformée en

$$\begin{cases} \dot{r} &= -r(r^2 - 1) \\ \frac{d\theta}{dt} &= -1 \end{cases}$$

- Si le système démarre sur le cercle unité $r = 1$, alors $\dot{}(t) = 0$. Le système resera sur le cercle unité et tournera auto de l'origine.
- Si $r < 1$, alors $\dot{r} > 0$. Le rayon va croître. La trajectoire tend vers le cercle unité de l'intérieur.
- Si $r > 1$, alors $\dot{r} < 0$. Le rayon va décroître. La trajectoire tend vers le cercle unité de l'extérieur..

Le cercle est alors un cycle limite stable.

Ceci peut également être déduit en examinant la solution analytique

$$r(t) = \frac{1}{(1 + c_0 e^{-2t})^{1/2}} \qquad \theta(t) = \theta_0 - t$$

avec $c_0 = \frac{1}{r_0^2} - 1$.

2.5.2 Existence des cycles limites

Il est important de prévoir l'existence de cycles limites afin d'éviter des oscillations du système qui peuvent êtres dangereuses. Les théorèmes suivants donnent des indications qui permettent de prévoir l'existence ou pas de cycles limites.

Théorème 2.1 (Théorème de Poincaré) *Si un cycle limite existe pour un système non linéaire du second ordre alors*

$$N = S + 1$$

avec :

S : *Nombre de noeuds, centres et foyers que le cycle limite entoure.*
N : *Nombre de points cols que le cycle limite entoure.*

Théorème 2.2 (Théorème de Bendixon) *Pour un système non linéaire du second ordre, aucun cycle limite ne peut exister dans une région du plan de phase dans laquelle*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \tag{2.19}$$

ne s'annule ni ne change de signe

Théorème 2.3 (Théorème de Poincaré-Bendixon) *Pour un système non linéaire du second ordre, si une trajectoire demeure dans une région finie, alors une des trois proposition suivant est vraie :*

1. *La trajectoire rejoint un point d'équilibre.*
2. *La trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.*
3. *La trajectoire est elle même un cycle limite.*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \tag{2.20}$$

2.6 Généralités sur les bifurcations

Définition 2.7 (Bifurcation-paramètres et points de bifurcation [11]) *Une bifurcation est un changement dans les points d'équilibres, des orbites périodiques ou dans les propriétés de stabilité d'un système non linéaire, quand un paramètre du système varie. Ce paramètre est appelé* ***paramètre de bifurcation****. Les valeurs auxquelles les changements qualitatif du comportement du système se produisent sont appelées* ***points de bifurcation****.*

Définition 2.8 (Diagramme de bifurcation) ***Le diagramme de bifurcation*** *est la représentation des points d'équilibre en fonction du paramètre de bifurcation.*

2.7 Bifurcation col-noeud

C'est une bifurcation qui correspond à la collision entre un col et un noeud quand la valeur d'un paramètre du système change

Exemple 2.8 (Bifurcation col-noeud ou saddle-node) *Soit le système suivant*

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 & = \mu - x_1^2 \\ \dot{x}_2 & = -x_2 \end{array} \tag{2.21}$$

Pour $\mu > 0$, le système à deux points d'équilibre $(\sqrt{\mu}, 0)$ et $(-\sqrt{\mu}, 0)$.
LA linéarisation autour de $(\sqrt{\mu}, 0)$ donne la matrice Jacobienne suivante

$$\begin{bmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

qui montre que $(\sqrt{\mu}, 0)$ est un noeud stable, alors que la linéarisation autour de $(-\sqrt{\mu}, 0)$ donne la matrice Jacobienne suivante

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

qui montre que $(-\sqrt{\mu}, 0)$ *est un col (instable).*

Quand μ *décroît, le noeud et le noeud se rapprochent. Pour* $\mu = 0$*, il y a collision entre les deux. Quand* μ *devient négatif, on observe un changement qualitatif important dans le portrait de phase du système. Pour* $\mu < 0$*, toutes les trajectoires s'éloignes vers l'infini. Nous avons le diagramme de bifurcation de la figure 2.7 Les traits discontinus représentent le col et les traits continus le noeud stable. Le point* $\mu = 0$ *est un point de bifurcation.*

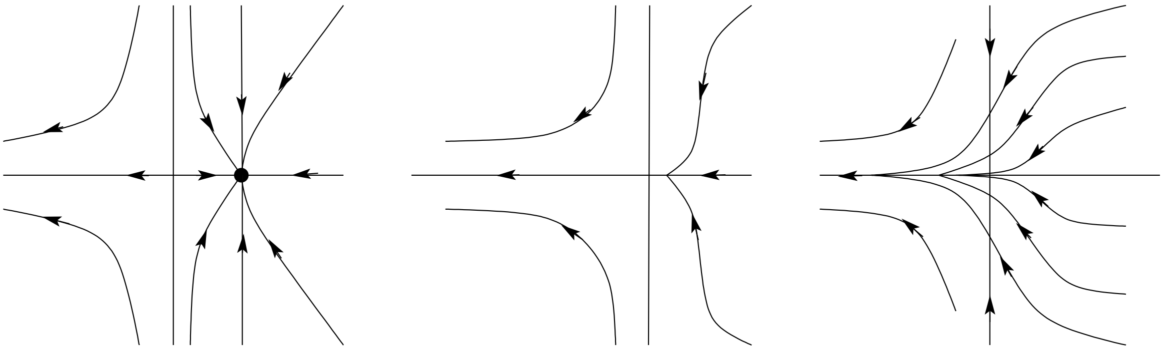


Figure 2.6 – Bifurcation col-noeud ou saddle-node.

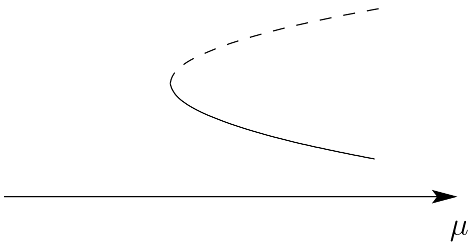


Figure 2.7 – Diagramme de la bifurcation saddle-node.

2.8 Bifurcation transcritique

Dans une bifurcation transcritique, les points d'équilibres sont persistants quand le paramètre de bifurcation varie, mais leur propriété de stabilité change

Exemple 2.9 (Bifurcation transcritique) *Soit le système du second ordre*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

il a deux point d'équilibre : $(0, 0)$ *et* $(\sqrt{\mu}, 0)$*. La Jacobienne en* $(0, 0)$ *est égale à*

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ce qui montre que $(0, 0)$ *est un noeud stable pour* $\mu < 0$ *et un col pour* $\mu > 0$*. D'autre par, la Jacobienne en* $(\mu, 0)$ *est*

$$\begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ce qui montre que $(\mu, 0)$ *est un col pour* $\mu < 0$ *et un noeud stable pour* $\mu > 0$.

Pour $\mu = 0$*, le premier point d'équilibre passe noeud stable à n col alors que le deuxième passe d'un col à un noeud stable. Cependant, le système garde toujours deux points d'équilibre, l'un stable et l'autre instable. Le diagramme d bifurcation est le suivant*

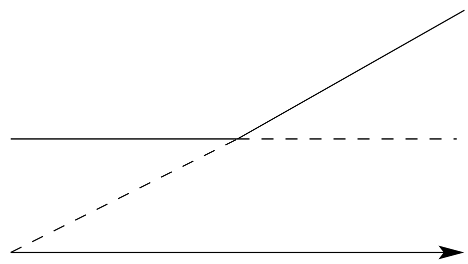


Figure 2.8 – Diagramme de la bifurcation transcritique.

2.9 Bifurcation de pitchfork

Cette bifurcation correspond à un changement dans le nombre des points d'équilibre à la valeur de bifurcation. Elle peut alors avoir la forme d'une fourchette (fork en anglais).

2.9.1 Bifurcation de pitchfork supercritique

Exemple 2.10 (Bifurcation de pitchfork supercritique) *Soit le système*

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_1^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_2$$

Pour $\mu < 0$*, il existe un seul point d'équilibre à l'origine* $(0, 0)$*. Le linéarisé tangent montre que c'est un noeud stable. Pour* $\mu > 0$*, il y a trois points d'équilibre :* $(0, 0)$*,* $(\sqrt{\mu}, 0)$*,* $(-\sqrt{\mu}, 0)$*. Les linéarisé tangents montre que* $(0, 0)$ *est un col alors que* $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ *sont des noeuds stables. Au point de bifurcation* $\mu = 0$*, le noeud stable* $\mu = 0$ *bifurque en trois points d'équilibres : un col et deux noeuds stables. L'amplitude des noeuds croit avec* μ*. son diagramme de bifurcation est le suivant*

2.9.2 Bifurcation de pitchfork souscritique

Exemple 2.11 (Bifurcation de pitchfork souscritique) *Soit le système suivant*

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 + x_1^3$$
$$\dot{x}_2 = -x_2$$

pour $\mu < 0$*, il existe trois point d'équilibre : Un noeud stable en* $(0, 0)$ *et deux cols en* $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$*. Pour* $\mu > 0$*, il n'existe plus qu'un seul point d'équilibre à l'origine qui est un col.*

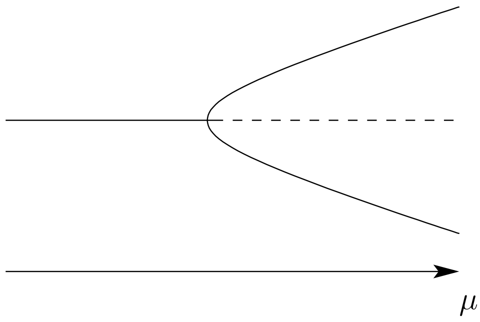


Figure 2.9 – Diagramme de la bifurcation de pitchfork supercritique.

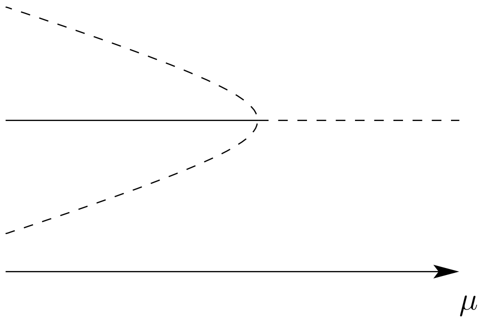


Figure 2.10 – Diagramme de la bifurcation de pitchfork souscritique.

2.10 Bifurcation de Hopf

Dans une bifurcation de Hopf, un foyer change de type de stabilité à la valeur critique de bifurcation. La paire de valeurs propres conjuguées du linéarisé tangent traverse alors l'axe imaginaire.

2.10.1 Bifurcation de Hopf supercritique

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1 \end{aligned}$$

en coordonnées polaires elle s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

le portrait de phase pour les valeurs de $\mu < 0$ et $\mu > 0$ sont donnée ci-dessous Pour $\mu < 0$,l'origine est un foyer stable. Toutes les trajectoires sont attirées vers lui. Pour $\mu > 0$, l'origine est un foyer instable mais il existe un cycle limite qui attire toutes les trajectoires sauf al trajectoire nulle. Le cycle limite a une amplitude $r = \sqrt{u}$ qui est proportionnel à μ. Quand μ passe des valeurs négatives à une valeurs positives assez petite, le système présentera des oscilaltions de faible amplitude. Cette bifurcation est donc sans danger.

Le linéarisé tangent autour de l'origine à pour matrice d'état

$$\begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

Ces valeurs propres $\mu \pm j$ traversent l'axe imaginaire quand μ change de signe.

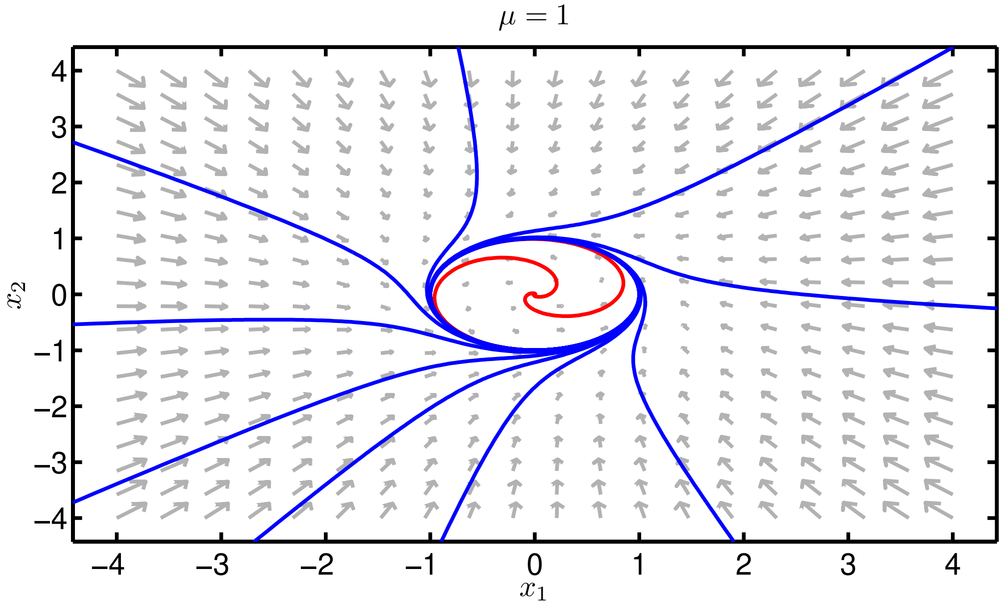


Figure 2.11 – Diagramme de la bifurcation de Hopf supercritique.

2.11 Exercices

Exercice 2.1

Soit le système non linéaire du second ordre décrit par la forme d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \end{cases}$$

1. Trouver les points singuliers de ce système,
2. Utiliser le linéarisé tangent pour classifier ces points singuliers,
3. Déduire le portrait de phase du système non linéaire.

Exercice 2.2

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + a x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + a x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

a est un paramètre réel.

1. Montrer que linéarisé tangent admet le point origine comme centre quelle que soit la valeur de a,
2. En passant aux coordonnées polaires, montrer que le système non linéaire admet l'origine comme foyer stable si $a < 0$ et instable si $a > 0$.

Exercice 2.3

Une particule de masse $m = 1$ se déplaçant le long d'un axe est placée dans un champ gravitationnel dont le potentiel V est définie par :

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

1. Ecrire l'équation du mouvement de la masse,
2. Déduire les points singulier et classifier les pour le linéarisé tangent,
3. Tracer le portrait de phase du système non linéaire.

Exercice 2.4

Soit l'oscillateur libre de Duffing décrit par l'équation suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - x_1^3 - \delta x_2, \qquad \delta \geq 0 \end{array} \right. \tag{2.22}$$

1. Calculer les points singuliers du système,
2. Déduire le linéarisé tangent pour chaque point singulier,
3. Déterminer la nature des points singuliers pour les linéarisés tangents,
4. Déduire leur nature pour l'oscillateur de Duffing libre.

Exercice 2.5

Soit le système planaire décrit par la représentation suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & -x_2 + x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{array} \right. \tag{2.23}$$

1. Calculer le linéarisé tangent autour de l'origine,
2. Étudier la nature de ce point singulier pour le linéarisé tangent. Que peut-on conclure pour le système original ?
3. Déduire la représentation du système non linéaire en coordonnées polaires r et θ définie par
$$x_1 = r\cos\theta \qquad x_2 = r\sin\theta \tag{2.24}$$
4. Étudier la stabilité du système non linéaire dans les nouvelles coordonnées. Comparer avec le linéarisé tangent. Conclure.

Exercice 2.6

Soit le système du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & -x_2 + x_1 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + x_2 \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{array} \right. \tag{2.25}$$

Reprendre les mêmes questions de l'exercice précédent.

Exercice 2.7

Soir le système non linéaire du second ordre décrit par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + g(x(t)) = 0 \tag{2.26}$$

avec

$$\alpha > 0, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie $g(0) = 0$.

1. Donner une représentation d'état du système sous la forme $\dot{x} = f(x)$ avec $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
2. Calculer l'expression de $\nabla f = \dfrac{\delta f_1}{\delta x_1} + \dfrac{\delta f_2}{\delta x_2}$
3. Montrer en utilisant le théorème de Bendixon que le système ne possède aucun cycle limite dans tout l'espace d'état.

Chapitre 3

Méthode du premier harmonique

La méthode du premier harmonique est une méthode d'analyse des système asservis comportant un organe non linéaire dans la boucle d'asservissement. Son principe est de remplacer l'organe non linéaire par un gain complexe équivalent pour pouvoir utiliser les outils d'analyse de l'automatique linéaire.

3.1 Analyse harmonique d'un système linéaire

Soit le système linéaire monovariable de fonction de transfert $G(s)$ avec une entrée $u(t)$ et une sortie $y(t)$. *L'analyse harmonique* de ce système consiste à étudier son comportement pour des entrées harmoniques (sinusoïdales). On impose alors au système en entrée une sinusoïde d'amplitude A et de pulsation ω

$$u(t) = \sin(\omega t) \tag{3.1}$$

la réponse du système $y(t)$ est aussi une sinusoïde de même fréquence mais d'amplitude et de phase initiale différentes

$$y(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \arg(G(j\omega))) \tag{3.2}$$

L'amplitude du signal d'entrée est amplifié par un gain égal au module de la fonction de transfert pour la pulsation du signal d'entrée $|G(j\omega)|$ et déphasée par $\arg(G(j\omega))$

3.2 Non linéarités usuelles

On va présenter dans cette section quelques non linéarités qu'on retrouve dans beaucoup de systèmes physiques : amplificateurs, actionneurs, moteurs, contacteurs ainsi que d'autres systèmes. Pour toutes les non linéarités qu'on présente par la suite, on appellera x l'entrée de la non linéarité et s sa sortie.

3.2.1 Saturation

Cette non linéarité est présente dans les actionneurs (moteurs électriques, actioneurs hydrauliques ou pneumatiques) mais aussi dans les amplificateurs (comme ceux à base d'amplificateurs opérationnels). Dans ces dispositifs, la sortie est proportionnelle à l'entrée sauf si on dépasse le seuil ($-a$ ou $+a$), la sortie alors se sature (figure 3.1.

La sortie s de cette non linéarité s'exprime en fonction de l'entrée x comme suit

$$S(x) = \begin{cases} -ka & \text{si} \quad x < -a \\ kx & \text{si} \quad -a \leq x \leq a \\ ka & \text{si} \quad x > a \end{cases} \tag{3.3}$$

Sa sortie est représentée sur la figure 3.1.

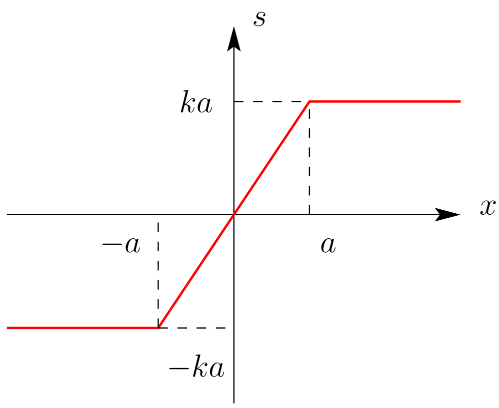


Figure 3.1 – Non linéarité de type saturation.

3.2.2 Seuil

La non linéarité seuil est aussi appelée *zone morte* ou *jeu*. Le système ne répond pas tant que la sortie est en dessous du seuil. Pour une entrée x entre $-\Delta$ et Δ, le système ne répond pas (sortie nulle). Le seuil est alors égal à Δ. La sortie est donnée par

$$S(x) = \begin{cases} k(x+\Delta) & \text{si} \quad x < -\Delta \\ 0 & \text{si} \quad -\Delta \leq x \leq \Delta \\ k(x-\Delta) & \text{si} \quad x > \Delta \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2.3 Seuil-saturation

Cette non linéarité combine les effets des deux non linéarités précédentes. Elle peut représenter l'association de deux organes présentant un seuil et une saturation. L'expres-

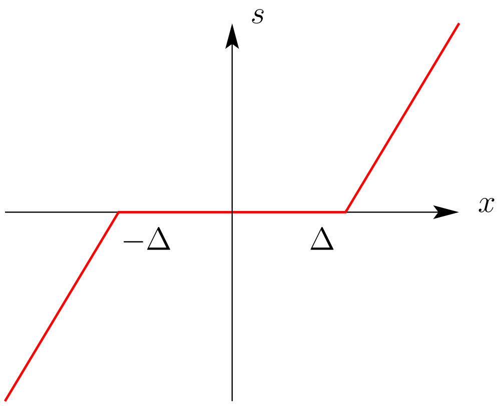


Figure 3.2 – Non linéarité de type seuil.

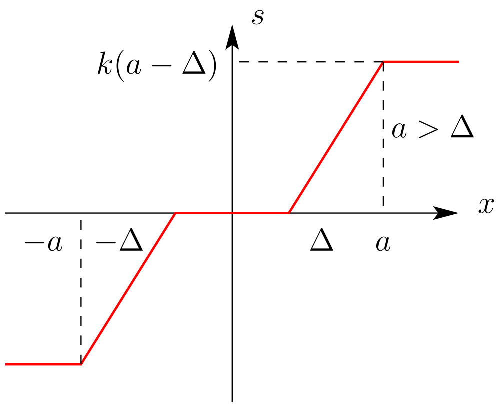


Figure 3.3 – Non linéarité de type seuil-saturation.

sion de la sortie est donnée par

$$S(x) = \begin{cases} k(-a+\Delta) & \text{si} \quad x < -a \\ k(x+\Delta) & \text{si} \quad -a \leq x \leq -\Delta \\ 0 & \text{si} \quad -\Delta \leq x \leq \Delta \\ k(x-\Delta) & \text{si} \quad \Delta \leq x \leq a \\ k(a-\Delta) & \text{si} \quad x > a \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2.4 Relai

Cette non linéarité est caractéristiques des dispositifs qui fonctionnent par tout-ou-rien. C'est la cas par exemple des valves, des diodes ainsi que de tous les dispositifs à commutation. La sortie ne peut prendre que deux valeurs : M si l'entrée x est positive et $-M$ si l'entrée x est négative. Pour $x = 0$, par convention on choisit une sortie nulle. Quand l'entrée passe d'une valeur négative vers une valeur positive, on dit que la sortie commute de la valeur $-M$ à ma valeur M et inversement si l'entrée passe du positif au

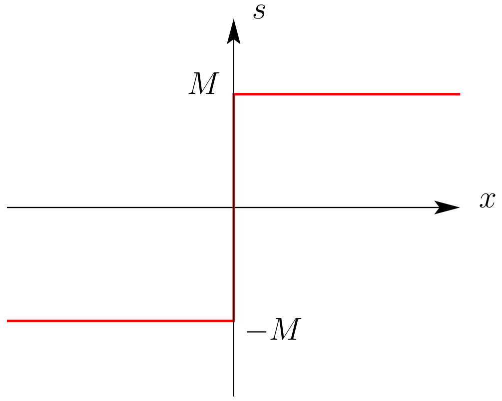


Figure 3.4 – Nonlinéarité de type relai.

négatif. L'expression de la sortie S en fonction de l'entrée x est donnée par

$$S(x) = \begin{cases} -M & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ M & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

3.2.5 Relai ternaire

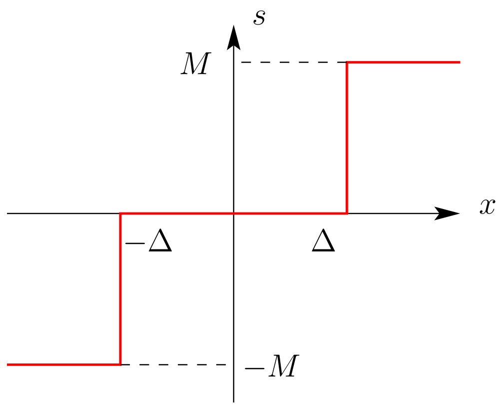


Figure 3.5 – Nonlinéarité de type relai avec seuil.

Un relai ternaire est un relai qui possède un seuil. Il est ainsi aussi appelé *relai à seuil.* La sortie ne commute pas à zéro mais à partir d'un seuil Δ en positif et $-\Delta$ en négatif. L'expression de la sortie est donnée par

$$S(x) = \begin{cases} -M & \text{si} \quad x < -Delta \\ 0 & \text{si} \quad -\Delta < x < \Delta \\ M & \text{si} \quad x > \Delta \end{cases} \tag{3.7}$$

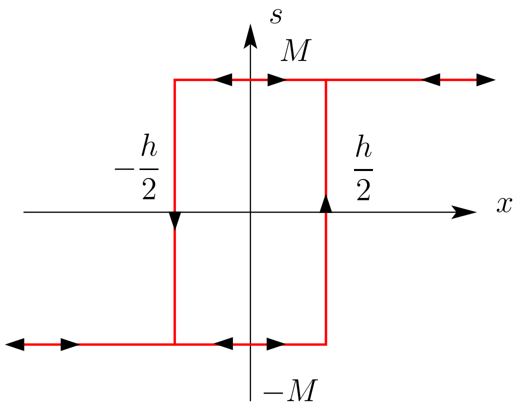


Figure 3.6 – Nonlinéarité de type hysterisis.

3.2.6 Hysterisis

Toutes le non linéarités vues précédemment *ne possèdent pas de mémoire*, *i.e.* leur sortie dépend uniquement de la valeur actuelle de l'entrée. Par contre, pour les non linéarité à mémoire, la valeur de la sortie future dépend de celle de l'entrée et de la valeur actuelle de la sortie. Un exemple typique des non linéarité à mémoire est l'hysteresis. Elle est présente par exemple dans les électro-aimants et les moteurs qui sont le siège d'un champs magnétique remanent créé par le passage d'un courant. Le champ magnétique persiste même après la disparition de la cause qui lui a donné naissance. On dit alors que ce dispositif *garde en mémoire* ce champs magnétique. Dans le cas de l'hysteresis représenté sur la figure 3.1, on notera S^+ l'expression de la sortie future et S^- celle de la sortie actuelle. La sortie est alors donnée par

$$\begin{aligned} &\text{Si } S^- = -M \text{ alors} \quad S^+ = \begin{cases} -M & si \quad x \leq \dfrac{h}{2} \\ +M & si \quad x > \dfrac{h}{2} \end{cases} \\ &\text{Si } S^- = +M \text{ alors} \quad S^+ = \begin{cases} +M & si \quad x \geq \dfrac{-h}{2} \\ -M & si \quad x < \dfrac{h}{2} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3 Classification des non linéarités

On peut définir différents critère pour classer les non linéarités, selon qu'elles soient continues ou pas, à mémoire ou sans mémoire, dure ou molle.

3.3.1 Non linéarité continue et discontinue

Une non linéarité est continue si la fonction S qui définie la sortie $S(x)$ en fonction de l'entrée x est continue par rapport à x sur toute la plage de variation de l'entrée. Un exemple est donné sur la figure 3.7 Dans le cas contraire, si la fonction S est discontinue,

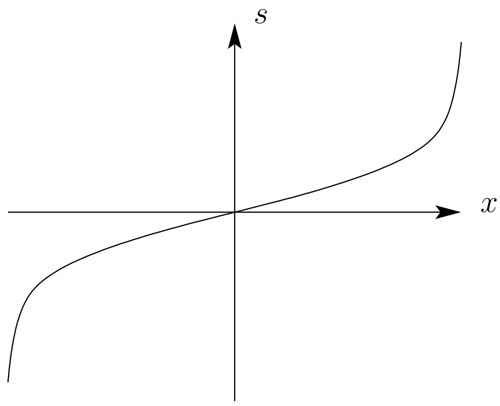


Figure 3.7 – Non linéarité continue.

il en est de même de la non linéarité. Cette dernière peut être néanmoins continues par morceau si le nombre de point de discontinuité est fini. Un exemple de non linéarité continue par morceau est donné sur la figure 3.8. C'est le cas d'un relai par exemple.

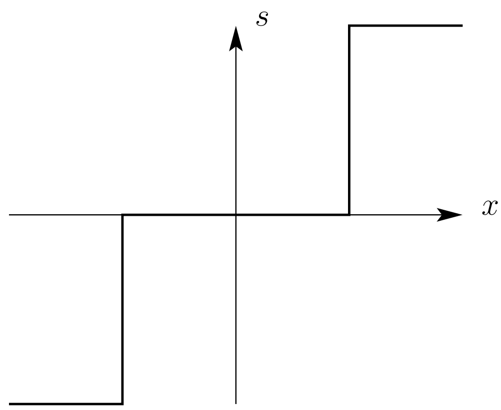


Figure 3.8 – Non linéarité discontinue.

Non linéarité continue.

3.3.2 Non linéarité à mémoire et sans mémoire

Ce point est évoqué précédemment avec la non linéartié de type hysteresis. La sortie future d'une non linéarité avec mémoire dépend de sa sortie passée et de son entrée. La sortie d'une non linéarité sans mémoire ne dépend que de son entrée. La figure 3.9 représente un exemple d'une non linéarité avec mémoire.

3.3.3 Non linéarité dure et molle

Une non linéarité est dure si la dérivée seconde de la sortie $S(x)$ par rapport à x est strictement positive. Dans le cas contraire, la non linéarité est molle. La figure 3.10 donne un exemple de ces deux types de non linéarités

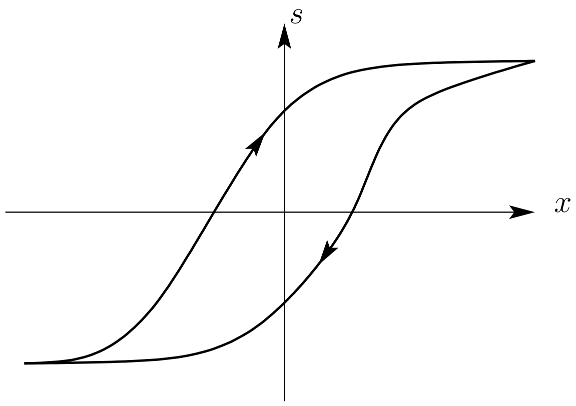


Figure 3.9 – Non linéarité à mémoire.

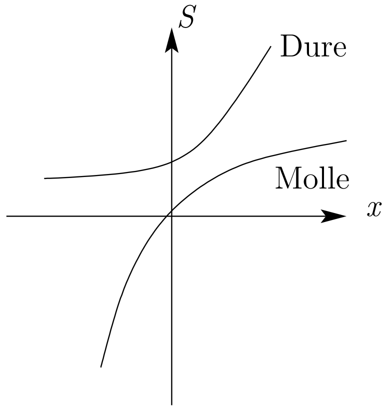


Figure 3.10 – Non linéarité dure et molle.

3.4 Non linéarité séparable

Une non linéarité est séparable si elle peut être décomposée en deux blocs en cascade : Le premier est un bloc non linéaire et le second est un bloc linéaire. On notera $\Phi(.)$ la fonction de la non linéarité correspondant au bloc non linéaire et $G(s)$ la fonction de transfert du bloc linéaire. Cette décomposition est représentée sur la figure 3.11 Dans

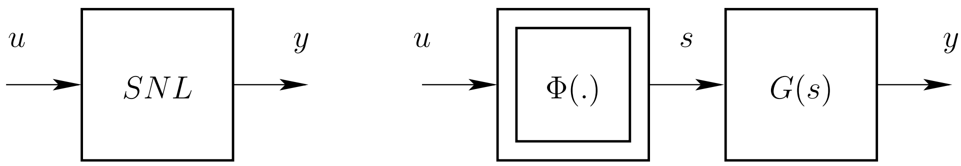


Figure 3.11 – Non linéarité séparable.

toute la suite de ce chapitre, on supposera que les non linéarités séparables vérifient les hypothèses suivantes :

1. La fonction de transfert $G(s)$ de la partie linéaire est *un filtre passe-bas*,
2. La non linéarité $\Phi(.)$ est une fonction impaire *i.e.* $-\Phi(u) = \Phi(-u)$. Elle est symétrique par rapport à l'origine O.

3.4.1 Réponse à une sinusoïde

On va maintenant étudier la réponse d'une non linéarité séparable à une entrée sinusoïdale. On applique une entrée $u(t)$ sinusoïdale d'amplitude A et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ à la non linéarité séparable décrite dans la figure 3.11

$$u(t) = A \sin(\omega t) \tag{3.9}$$

Compte-tenu de sa nature impaire, la sortie de la non linéarité $\Phi(.)$ est une fonction périodique de moyenne nulle, de même période T que la sinusoïde d'entrée. Cette sortie n'est pas sinusoïdale. Un exemple de signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $s(t)$ est représenté sur la figure 3.12   Comme $s(t)$ est périodique, elle est décomposable en série de Fourier

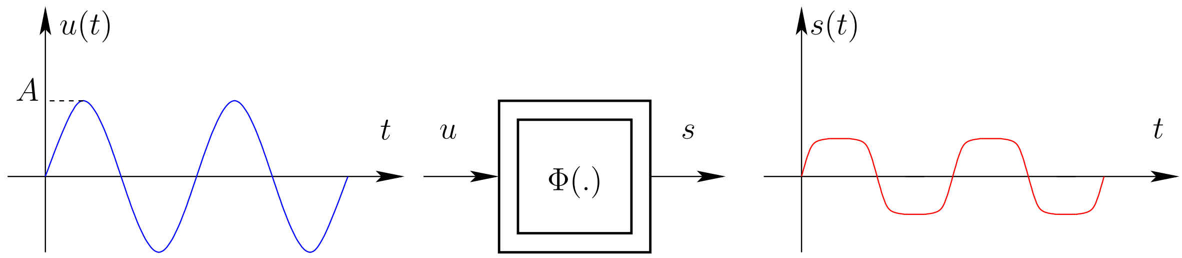


Figure 3.12 – Sortie de la non linéarité $\Phi(.)$.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \tag{3.10}$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega t)dt \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega t)dt \end{aligned} \tag{3.11}$$

Comme la non linéarité statique $\Phi(.)$ est impaire

$$\Phi(-t) = -\Phi(t) \tag{3.12}$$

alors $a_0 = 0$, $s(t)$ est un signal à valeur moyenne nulle. La décomposition de $s(t)$ devient

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \tag{3.13}$$

qui peut être ramenée à une série de sinus

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(n\omega t + \phi_n) \tag{3.14}$$

avec

$$\begin{aligned} s_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

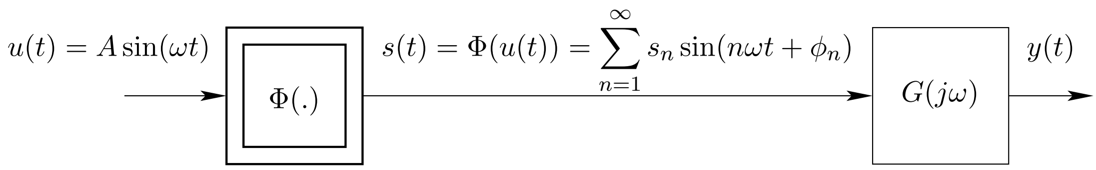


Figure 3.13 – Association de $\Phi(.)$ et de $G(s)$.

Comme le montre la figure 3.13, le signal $s(t)$ est soumis à l'entrée de la partie linéaire $G(s)$ Un système linéaire fournit toujours pour une entrée sinusoïdale une sortie sinusoïdale de

même période. On suppose que $G(s)$ est un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure qui permet de satisfaire à l'hypothèse suivante

$$|G(jn\omega)| \ll |G(j\omega)|, \quad n \geq 2 \tag{3.16}$$

Ainsi, toutes les harmoniques d'ordre supérieur ($n \geq 2$) issues de la décomposition 3.15 de $s(t)$ sont atténués par $G(s)$. Ceci revient à négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 1 dans la sortie $y(t)$. On ne garde que la première harmonique dans la décomposition en série de Fourier de $s(t)$, d'où l'appellation *méthode du premier harmonique*. On peut ainsi faire l'approximation suivante

$$s(t) \simeq a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = s_1 \sin(\omega t + \phi_1) \tag{3.17}$$

avec

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ \phi_1 &= \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

On souhaite maintenant passer en notation complexe des grandeurs sinusoïdales. La représentation complexe de l'entrée $u(t) = A\sin(\omega t)$ est

$$U(A, \omega) = Ae^{j\omega t} \tag{3.19}$$

tel que

$$u(t) = \mathrm{Im}\{U(A, \omega)\} \tag{3.20}$$

La représentation complexe de la sortie $s(t)$ est alors en posant $M = s_1$ et $\alpha = \phi_1$

$$S(A, \omega) = Me^{j\omega t + \alpha} \tag{3.21}$$

On définit alors le gain complexe équivalent $N(A, \omega)$ comme le rapport entre la sortie complexe $S(A, \omega)$ et l'entrée complexe $U(A, \omega)$

$$N(A, \omega) = \frac{S(A, \omega)}{U(A, \omega)} = M\frac{e^{j\omega t + \alpha}}{e^{j\omega t}} = \frac{M}{A}e^{\alpha} \tag{3.22}$$

En résumé, la non linéarité se comporte vis-à-vis d'une entrée sinusoïdale en multipliant son gain par $\dfrac{M}{A}$ et en rajoutant à sa phase $\alpha = \phi_1$. Ceci revient à multiplier la représentation complexe de l'entrée $U(A, \omega)$ par le gain complexe équivalent $N(A, \omega)$.

On peut ainsi remplace la non linéarité statique $\Phi(.)$ par son gain complexe équivalent $N(A, \omega)$ qui crée une amplification et un déphasage de la sinusoïde d'entrée

$$N(A, \omega) = \frac{M}{A} e^{j\alpha} \tag{3.23}$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(\omega t) dt \\ b_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \qquad ; \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \tag{3.25}$$

En coordonnées cartésiennes, on a

$$N(A, \omega) = \frac{M}{A} e^{j\alpha} = \frac{M}{A} (\cos\alpha + j \sin\alpha) = \frac{M}{A} \left(\frac{b_1}{M} + j\frac{a_1}{M}\right) \tag{3.26}$$

soit finalement

$$N(A, \omega) = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1) \tag{3.27}$$

Remarque 3.1 *La notation*

$$N(A, \omega) = N_P(A, \omega) + N_Q(A, \omega) j \tag{3.28}$$

est utilisée pour désigner

$$\begin{aligned} N_P(.) &= \frac{b_1}{A} \quad \textit{gain de phase.} \\ N_Q(.) &= \frac{a_1}{A} \quad \textit{gain en quadrature.} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Exemple 3.1 (Gain complexe équivalent d'une saturation) *On souhaite calculer le gain complexe équivalent d'une saturation de seuil a et de gain k. La sortie de la saturation s pour une entrée u est donnée par la courbe suivante (figure 3.14*

On impose à l'entrée de la saturation une sinusoïde d'amplitude A et de pulsation ω

$$u(t) = A \sin(\omega t) \tag{3.30}$$

La sortie de la saturation est une sinusoïde amplifiée mais clampée. L'entrée et la sortie sont représentée sur la figure 3.16. On distingue deux cas :

1. *Pour $A \leq a$ on a*

$$s(t) = kA \sin(\omega t) \tag{3.31}$$

2. *Pour $A > a$ on a*

$$s(t) = \begin{cases} kA \sin(\omega t) & \textit{pour } 0 \leq \omega t \leq \gamma \\ ka & \textit{pour } \gamma < \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{3.32}$$

avec

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{a}{A}\right) \tag{3.33}$$

On calcule alors les coefficients de la fondamentale

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt \\ b_1 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt \end{aligned} \tag{3.34}$$

Par symétrie, on a

$$a_1 = 4 \times \left(\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} s(t)\cos(\omega t)dt\right) = 0 \tag{3.35}$$

et

$$b_1 = 4 \times \left(\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} s(t)\sin(\omega t)dt\right) \tag{3.36}$$

avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. *En faisant le changement de variable*

$$\tau = \omega t \tag{3.37}$$

on obtient

$$b_1 = 4 \times \left(\frac{2}{\omega T}\int_0^{\frac{\omega T}{4}} s(\tau)\sin(\tau)d\tau\right) \tag{3.38}$$

Après le calcul de b_1, *le gain complexe équivalent de la saturation est*

$$N(A) = \frac{b_1}{A} \tag{3.39}$$

soit

$$N(A) = \begin{cases} k & \textit{pour } A \leq a \\ \dfrac{2k}{\pi}\left[\arcsin\left(\dfrac{a}{A}\right) + \dfrac{a}{A}\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{A^2}}\right] & \textit{pour } A > a \end{cases} \tag{3.40}$$

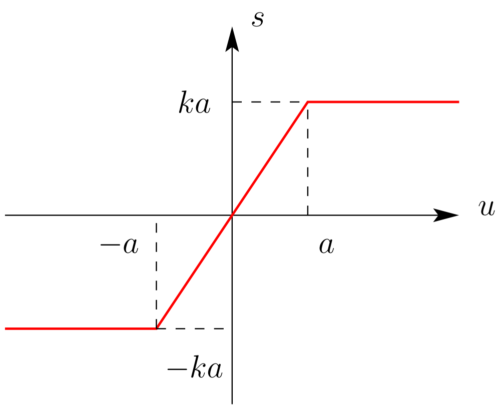


Figure 3.14 – Sortie d'une saturation.

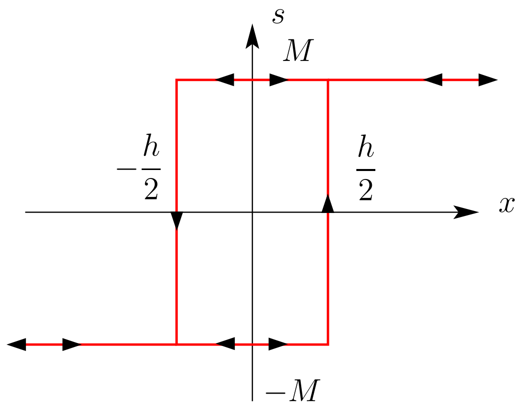


Figure 3.15 – Nonlinéarité de type hysterisis.

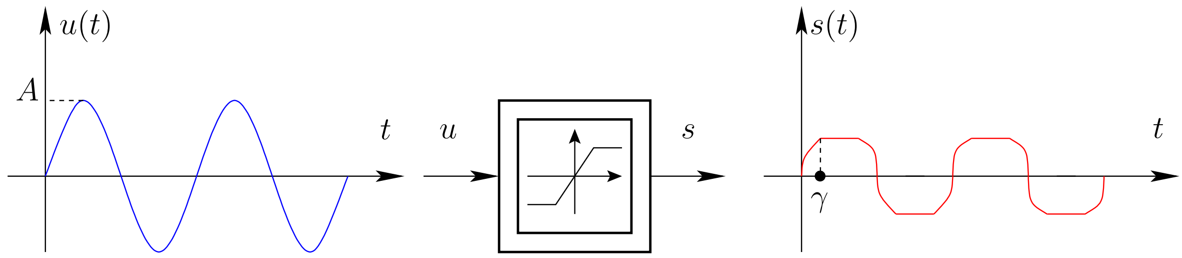


Figure 3.16 – Signal de sortie pour une entrée sinusoïdale.

3.5 Etude d'un système à non linéarité séparable en boucle fermée

On considère un système non linéaire à non linéarité séparable placé en boucle fermée. Cette boucle est à retour unitaire avec une rétroaction négative. Ce système est représenté par la figure 3.26 On suppose que la référence $r(t)$ est nulle pour que le système soit en

régime libre.

L'objectif est d'étudier les conditions d'apparition d'auto-oscillations en boucle fermée. On souhaite également étudier les caractéristiques de ces oscillations : Amplitude, fréquence. Compte-tenu du schéma de la figure 3.26, les équation du système en boucle fermée sont données par

$$\begin{aligned} s(t) &= \Phi(u(t)) \\ y(t) &= \int_0^t s(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ u(t) &= -y(t) \end{aligned} \tag{3.41}$$

avec $g(t)$ la réponse impulsionnelle de $G(s)$. En faisant les substitutions on obtient

$$y(t) = \int_0^t \Phi(-y(\tau))g(t-\tau)d\tau \tag{3.42}$$

L'équation 3.42 est une condition nécessaire pour l'apparition d'auto-oscillations. Il s'agit d'une équation intégrale non linéaire dont l'inconnue est $y(t)$. La résolution exacte de cette équation de façon analytique est souvent difficile à cause de la non linéarité $\Phi(.)$. L'idée

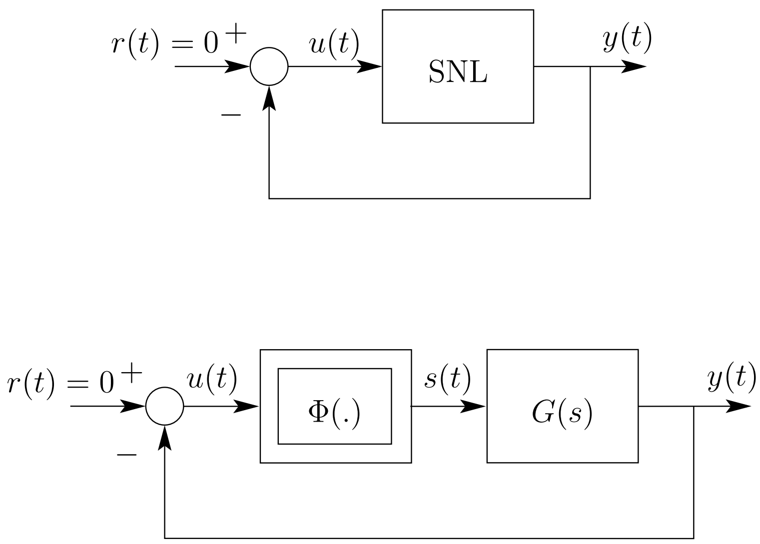


Figure 3.17 – Système à non linéarité séparable en boucle fermée.

est alors de remplacer la non linéarité $\Phi(.)$ par son gain complexe équivalent $N(A, \omega)$ qui dépende de l'amplitude A et quelques fois de la pulsation ω d'une entrée sinusoïdale. On obtient alors le schéma équivalent suivant en boucle fermée   Dans le plan fréquentiel ω,

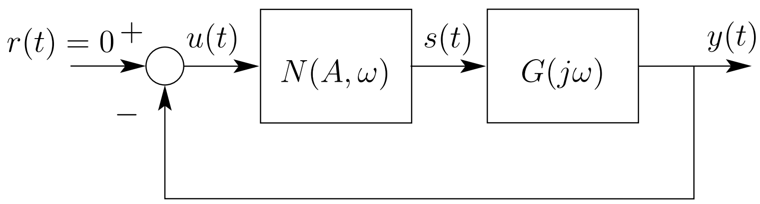


Figure 3.18 – Schéma équivalent de la non linéarité en boucle fermé.

les équations du système sont

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S(j\omega) & = & N(A, \omega)U(j\omega) \\ Y(j\omega) & = & G(j\omega)S(j\omega) \\ U(j\omega) & = & -Y(j\omega) \end{array} \right. \tag{3.43}$$

ce qui donne

$$Y(j\omega) = -G(j\omega)N(A, \omega)Y(j\omega) \tag{3.44}$$

ce qui permet de simplifier $Y(j\omega)$ des deux termes de l'équation. Ceci n'était pas possible avec l'équation intégrale non linéaire. La condition nécessaire de présence d'auto-oscillations non linéaires est alors donnée par

$$G(j\omega)N(A, \omega) = -1 \tag{3.45}$$

3.6 Rappel sur le critère de stabilité de Nyquist

On rappelle brièvement dans cette section le critère de Nyquist simplifié appelé aussi *critère du revers*. Soit le système linéaire décrit par sa fonction de transfert $G(s)$. Il est placé en boucle fermée avec un gain réel K. Ce système est représenté sur la figure 3.19 Le système bouclé est en régime libre (consigne nulle). Il évolue uniquement à partir de

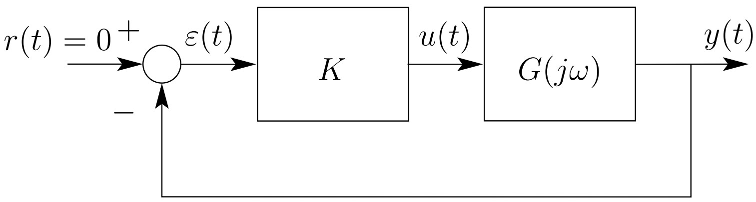


Figure 3.19 – Système linéaire en boucle fermée avec action proportionnelle.

ses conditions initiales. On suppose que $G(s)$ est stable. D'après le critère de Nyquist, le système en boucle fermée est :

1. Stable si le diagramme de Nyquist de $KG(j\omega)$ ne passe pas par le point $(-1, 0)$ et ne l'entoure pas. Il le laisse à sa gauche quand on parcours le diagramme de $KG(j\omega)$ dans le sens des ω positifs croissants,
2. Oscillant si le diagramme de Nyquist de $KG(j\omega)$ passe par le point $(-1, 0)$,
3. Instable si le diagramme de Nyquist de $KG(j\omega)$ entoure le point $(-1, 0)$, soit il le laisse à sa droite quand on parcours le diagramme dans le sens des ω positifs croissants.

Ceci est résumé par la figure 3.19 De façon équivalente, de reformuler le critère de

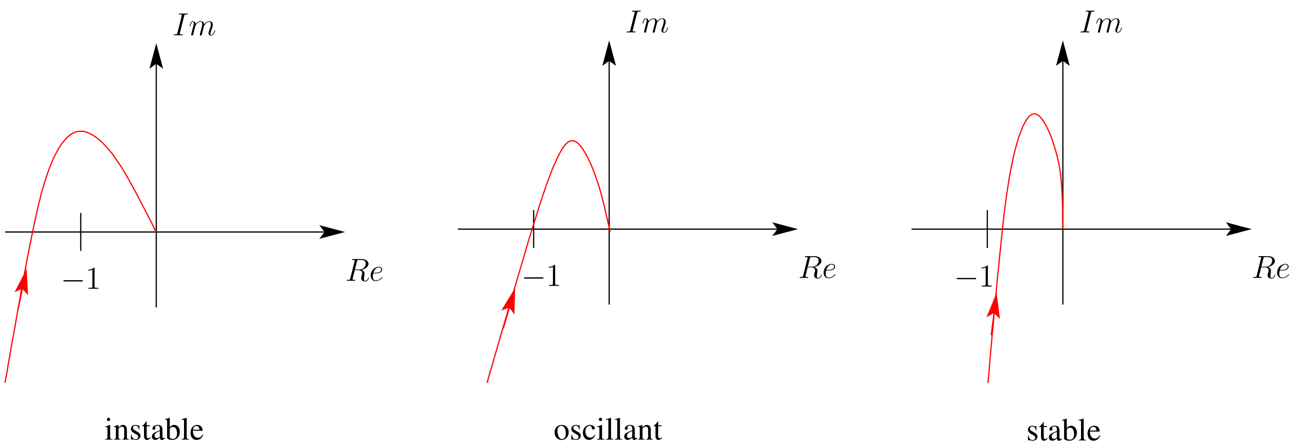


Figure 3.20 – Critère du Revers.

Nyquist en traçant le diagramme de Nyquist de $G(j\omega)$ et en ramenant le point critique $(-1, 0)$ au point $(-\frac{1}{K}, 0)$. Le critère s'énonce alors comme suit :

1. Le système en boucle fermée est stable si le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ ne coupe pas le point $(-\frac{1}{K}, 0)$ et ne l'entoure pas,
2. Il est oscillant si le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ coupe le point $(-\frac{1}{K}, 0)$,
3. Le système est instable si le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ entoure le point $(-\frac{1}{K}, 0)$.

3.7 Application aux systèmes à non linéarité séparable

Le principe de la méthode est de reprendre le schéma 3.26 en boucle fermée du système à non linéarité séparable et de remplacer la non linéarité $\Phi(.)$ par son gain complexe équivalent $N(A,\omega)$ comme le montre la figure 3.18.

Le gain complexe équivalent $N(A,\omega)$ joue alors le rôle du gain K vu dans le critère du revers. On suppose que le gain complexe équivalent est indépendant de la pulsation ω

$$N(A,\omega) = N(A) \tag{3.46}$$

La condition nécessaire d'apparition d'oscillation est alors que le lieu de $N(A)G(j\omega)$ passe par le point $(-1,0)$

$$G(j\omega)N(A) = -1 \tag{3.47}$$

soit

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \tag{3.48}$$

C'est donc le point où les diagrammes de $G(j\omega)$ et de $-\dfrac{1}{N(A)}$ se coupent dans le plan complexe. Ceci est illustré par la figure 3.21 Il est à signaler que que la courbe de $G(j\omega)$

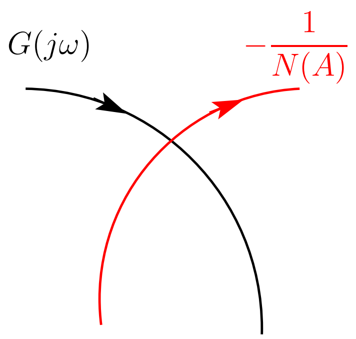


Figure 3.21 – Point d'intersection de $G(j\omega)$ et de $-\dfrac{1}{N(A)}$.

est paramètrée par la pulsation ω et celle de $-\dfrac{1}{N(A)}$ par l'amplitude A. La courbe de $-\dfrac{1}{N(A)}$ dans le plan complexe est appelée *lieu critique.*

La détermination des caractéristiques de l'oscillation revient à résoudre l'équation complexe $G(j\omega) = -\dfrac{1}{N(A)}$ par rapport aux deux inconnues A qui représente l'amplitude des oscillations et ω qui est leur pulsation. On sait que $G(j\omega)$ est complexe alors que $-\dfrac{1}{N(A)}$ peut être réel où complexe. En identifiant les parties réelles et imaginaire, on obtient un système de deux équations pour les deux inconnues ω et A.

Exemple 3.2 (Auto-oscillations d'un relai parfait) *On considère un relai parfait placé en boucle fermée avec le système linéaire stable de fonction de transfert* $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$ *[12]. Le système en boucle fermée est représenté sur la figure 3.29*

On rappelle l'expression de la sortie $s = \Phi(u)$ du relai parfait vu en section 3.2.4

$$S(x) = \begin{cases} -M & si \quad u < 0 \\ 0 & si \quad u = 0 \\ M & si \quad u > 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

On montre que le gain complexe équivalent du relai parfait est donné par

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \tag{3.50}$$

Le gain complexe équivalent est dans ce cas un gain réel qui dépend de l'amplitude A des oscillations. La figure 3.23 montre le tracé du lieu de Nyquist de $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$ paramétré par ω. Sur la même figure on représente également le tracé du lieu critique $-\dfrac{1}{N(A)}$ en fonction de A croissant

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4M} \tag{3.51}$$

Le lieu critique $-\dfrac{1}{N(A)}$ est confondu avec la partie négative de l'axe des réels. Pour trouver les point critiques, on résout l'équation complexe

$$G(j\omega)N(A) + 1 = 0 \tag{3.52}$$

par rapport à A et ω. L'équation s'écrit

$$\frac{1}{(j\omega+1)^3} \cdot \frac{4M}{\pi A} + 1 = 0 \tag{3.53}$$

soit

$$\frac{4M}{\pi A(j\omega+1)^3} = -1 \tag{3.54}$$

d'où

$$\arg\left(\frac{4M}{\pi A(j\omega+1)^3}\right) = \arg(-1) = -\pi \tag{3.55}$$

soit

$$\arg(j\omega+1) = \pi \tag{3.56}$$

ou encore

$$3\arctan(\omega) = \pi \tag{3.57}$$

ce qui donne

$$\omega_0 = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} rad\, s^{-1} \tag{3.58}$$

de même

$$\left|\frac{1}{(j\omega+1)^3}\right| \cdot \frac{4M}{\pi A} = 1 \tag{3.59}$$

pour $\omega = \omega_0$ donnée par 3.58, on a

$$A_0 = \frac{4M}{\pi \left|(j\sqrt{3}+1)\right|^3} = \frac{4M}{8\pi} = \frac{M}{2\pi} \tag{3.60}$$

Les caractéristiques des oscillation sont donc

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{M}{2\pi} \\ \omega_0 = \sqrt{3} rad\, s^{-1} \end{cases} \tag{3.61}$$

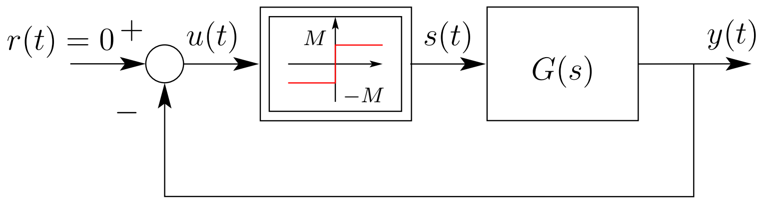


Figure 3.22 – Relai parfait en boucle fermée.

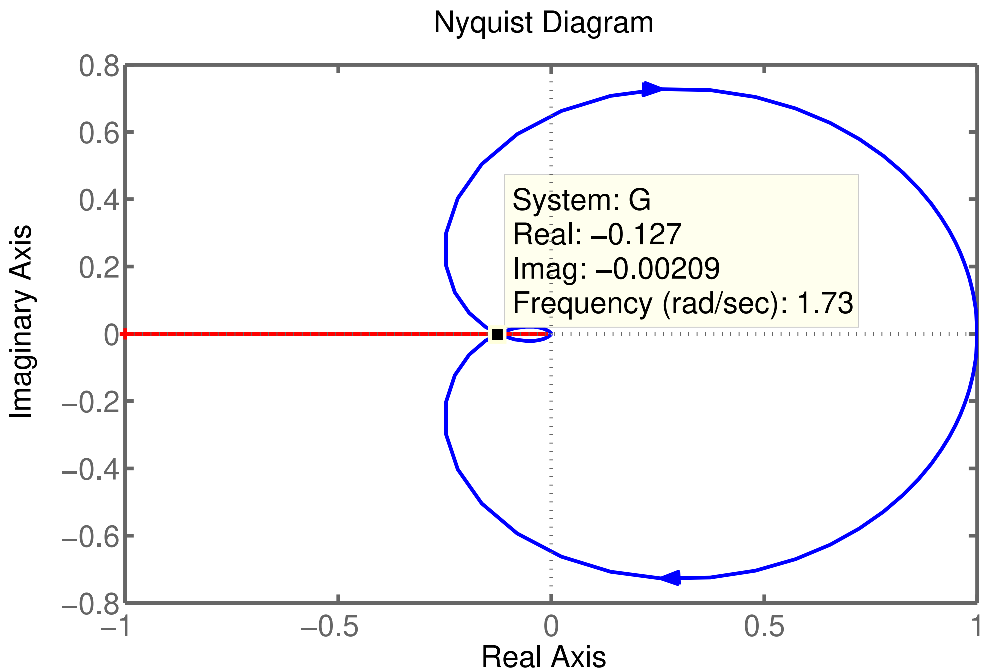


Figure 3.23 – Diagramme de Nyquist et lieu critique.

3.8 Etude de la stabilité des oscillations

On suppose que le système à non linéarité séparable en boucle fermée est le siège d'oscillations d'amplitude A_0. On suppose que système est soumis à une perturbation qui fait passer l'amplitude des oscillations de A_0 à A_1. Comme le montre la figure 3.24, on distingue deux cas :

1. Si $A_1 > A_0$, alors le point critique passe à gauche du lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ (Figure 3.24). Le système en boucle fermée est stable. L'amplitude des oscillation décroît pour revenir à A_0,
2. Si $A_1 < A_0a$, le point critique passe à droite du lieu de Nyquist de $G(j\omega)$. Le système en boucle fermée est instable. L'amplitudes des oscillations croit jusqu'à revenir à A_0 (Figure 3.24).

Le critère de Loeb permet de généraliser cette analyse pour l'étude de la stabilité des oscillation dans le cas général

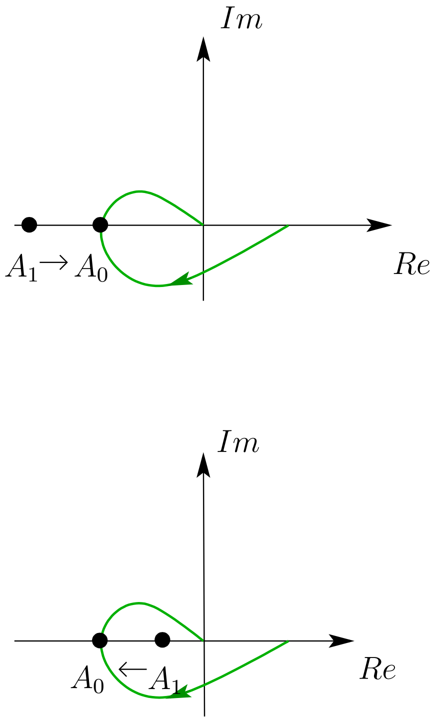


Figure 3.24 – Stabilité des oscillations.

Critère de Loeb : Soit un système non linéaire à non linéarité séparable placé en boucle fermée avec retour unitaire et rétroaction négative et une référence nulle. Les oscillations sont stable si en parcourant le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ pour ω croissant de 0 à $+\infty$, on laisse à sa gauche le lieu critique $C(A) = -\dfrac{1}{N(A)}$ pour A croissant de 0 à $+\infty$.

3.9 Exercices

Exercice 3.1

On considère un relais sans seuil avec hysteresis. Sa caractéristique est donnée par la figure suivante

1. Donner l'expression de $s(t)$ en fonction de $x(t)$,

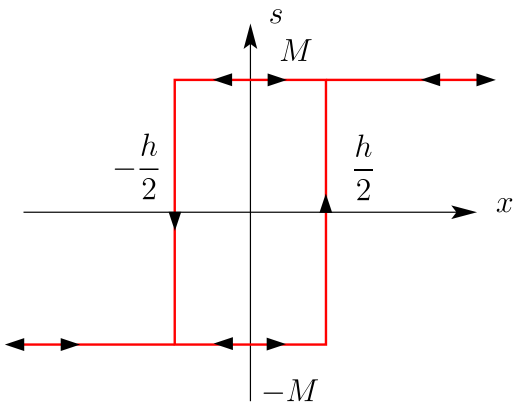


Figure 3.25 – Nonlinéarité de type hysterisis.

2. Tracer la sortie du relais avec hysterisis pour une entrée sinusoïdale d'amplitude A et de pulsation ω,
3. Déduire l'expression de la sortie $s(t)$,
4. Calculer le gain complexe équivalent $N(A, \omega)$,
5. Tracer le gain complexe équivalent dans le plan de Nyquist.

Exercice 3.2

Soit le système à non linéarité séparable en boucle fermée décrit par la figure suivante
La non linéarité $\Phi(.)$ est représentée sur la courbe ci-dessous

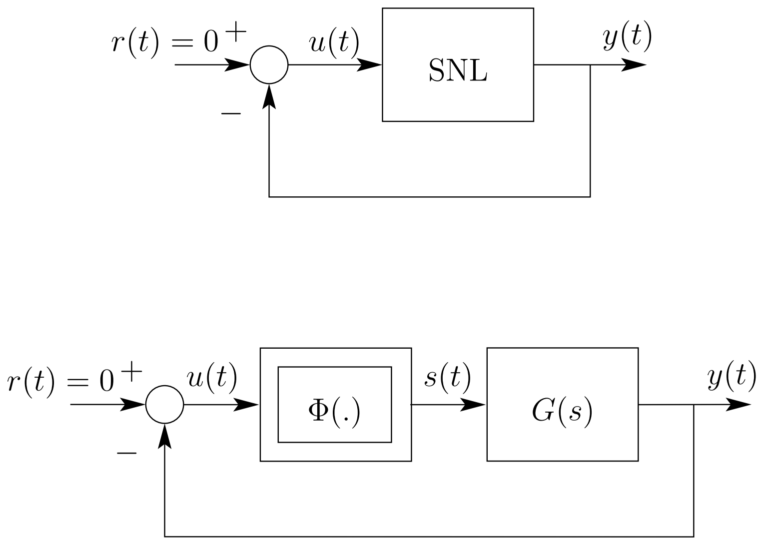


Figure 3.26 – Système à non linéarité séparable en boucle fermée.

1. Écrire l'expression de $\Phi(.)$,
2. Tracer la sortie de la non linéarité pour une entrée $u(t) = A \sin(\omega t)$,
3. Calculer le gain complexe équivalent $N(A, \omega)$ et le lieu critique $C(A, \omega)$,

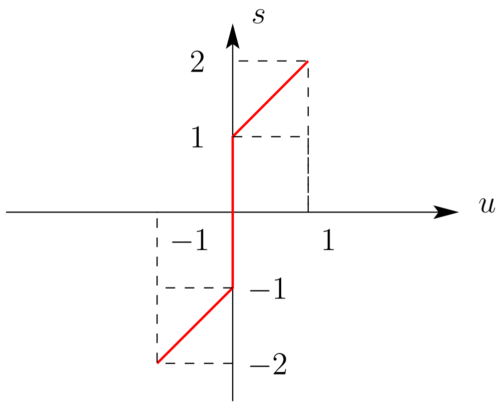


Figure 3.27 – Non linéarité.

4. On considère que la partie linéaire $G(s)$ est donnée par l'expression suivante
$$G(s) = \frac{1}{(s+3)^3}$$
Étudier la présence d'oscillations dans le système en boucle fermée,
5. Calculer l'amplitude des oscillations,
6. Calculer la pulsation des oscillations ω_{osc}.

Exercice 3.3

Soit la non linéarité représentée sur la figure 3.28 Il s'agit d'une parabole de coefficient

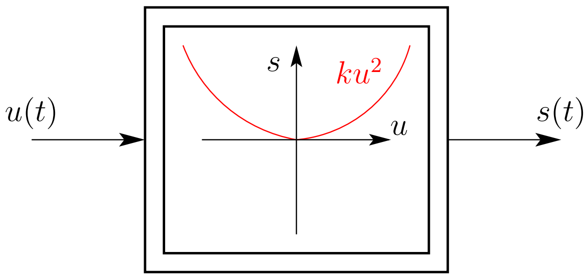


Figure 3.28 – Non linéarité en parabole.

k.

1. Dessiner la forme de la sortie $s(t)$ pour une entrée sinusoïdale d'amplitude A et de pulsation ω,
2. Calculer l'expression de la sortie $s(t)$ pour cette entrée,
3. Calculer le gain complexe équivalent $N(A,\omega)$,
4. Que peut-on conclure ?

Exercice 3.4

On considère un relai parfait placé en boucle fermée avec un système linéaire à gain variable $K > 0$. Il est représenté sur la figure **??** La fonction de transfert du système

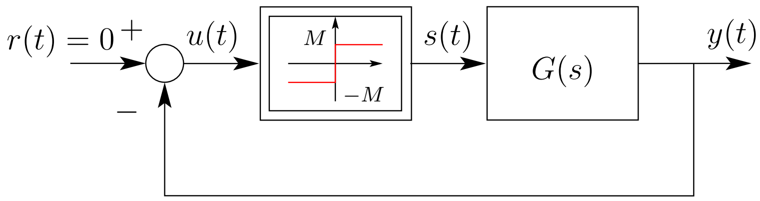


Figure 3.29 – Non linéarité en parabole.

linéaire est

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

1. Tracer la sortie du relai pour une entrée sinusoïdale d'amplitude A et de pulsation ω,
2. Calculer le gain complexe équivalent $N(A)$ du relai,
3. Tracer le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$. Tracer le lieu critique $C(A)$,
4. Étudier la présence d'oscillation en boucle fermée en fonction d K,
5. Déterminer les caractéristiques de ces oscillations,
6. Étudier la stabilité de ces oscillations.

Exercice 3.5

Soit le schéma bloc de l'asservissement de la figure 3.30

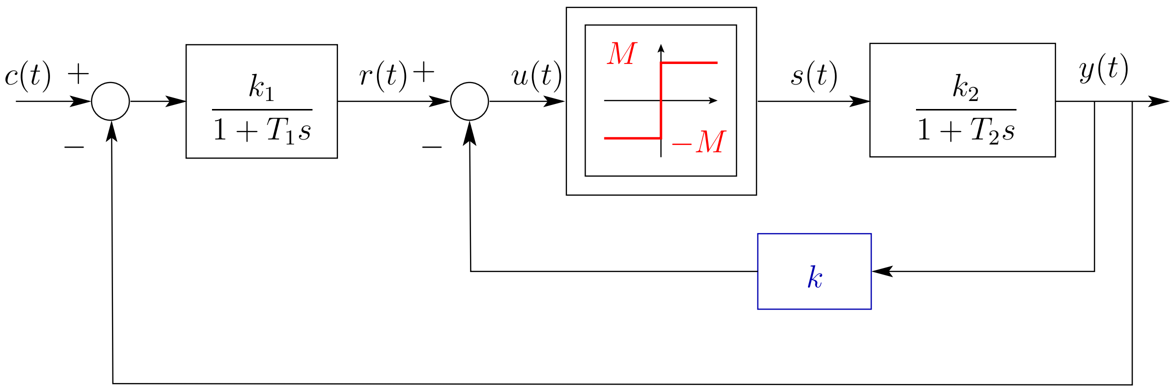


Figure 3.30 – Relai avec deux boucles imbriquées.

On souhaite étudier la présence d'oscillations et éventuellement leur nature.

1. Mettre le schéma bloc sous forme canonique pour faire apparaître un système à nonlinéarité séparable en boucle fermée avec retour unitaire,
2. Calculer le gain complexe équivalent $N(A)$ du relai,
3. Étudier la présence d'oscillation pour ce système.

Chapitre 4

Stabilité des Systèmes non Linéaires Autonomes

4.1 Notion de stabilité

On donnera d'abord une définition *intuitive* ou *qualitative* de la stabilité. On verra alors que cette définition est insuffisante. Pour lever toute ambiguïté, il est nécessaire de donner une définition mathématique de cette notion. Ça sera l'objet de ce chapitre dans le cadre général de la théorie de Lyapunov sur la stabilité.

4.1.1 Importance de la notion de stabilité

La première et la plus importante des propriétés d'un système de commande est *la stabilité*. Toutes les autres propriétés (rapidité, précision, rejet de perturbations, robustesse) n'auraient aucun sens si le système est *instable* ; un système instable est inutilisable et potentiellement dangereux [1] Il est alors important de vérifier et de garantir cette propriété pour tout système de commande.

4.1.2 Évolution historique de la notion de stabilité

Le problème de stabilité est inclus dès les débuts dans la théorie des équations différentielle. L'objectif est d'obtenir des informations sur le comportement des trajectoires d'un système sur sans résoudre les équations différentielles qui régissent son comportement. Le mathématicien français J. L Lagrange étudia la stabilité des systèmes mécaniques conservatifs. Il démontra que le point d'équilibre d'un système libre est stable s'il correspond à une énergie potentielle minimale. Le mathématicien et astronome anglais Airy fut l'un des premiers à étudier la stabilité dun système de commande. Il étudia le comportement d'un télescope commandé en vitesse et en position. Il démontra par un modèle basé sur des équations différentielles que le comportement du système peut devenir dangereusement instable.

A la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle, plusieurs scientifiques étudièrent le problème de stabilité : J. C. Maxwell, E. J. Routh, I. A. Wischnegradskii, A. Stodola et Hurwitz. Ils étudièrent particulièrement sous quelles conditions les coefficients d'une équation différentielle linéaire donnent des solutions stables. Maxwell et Wischnegradskii obtiennent des résultats pour des systèmes du troisième ordre. Routh obtient un résultat général pour un système d'ordre quelconque. Par la suite, vinrent les travaux de Lyapunov, Hurwitz et Nyquist. Hurwitz aboutira à des conclusions similaires à celles de Rouh [13].

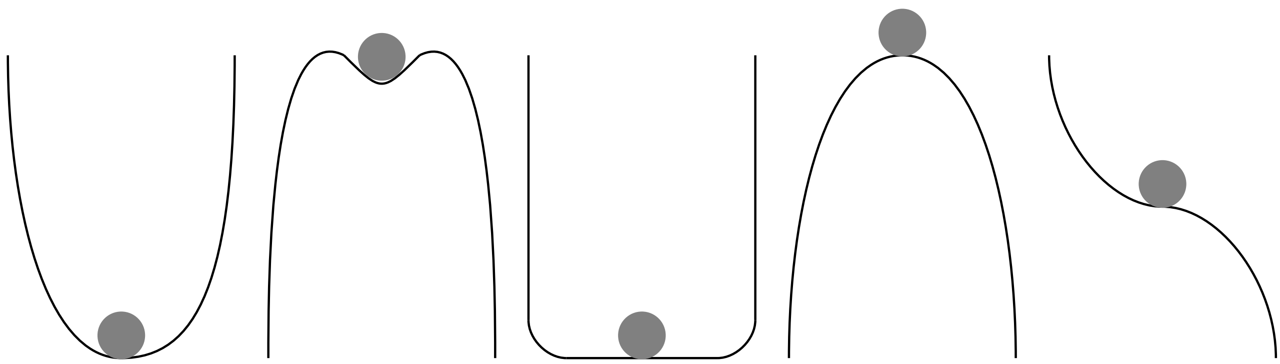
La théorie de Lyapunov sur la stabilité, introduite à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle pa le mathématicien russe Alexandr Mikhailovich Lyapunov offre un cadre général pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires sans avoir à résoudre ces équations.

4.1.3 Définition intuitive de la stabilité

Intuitivement, un système est *stable* si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir, *instable* s'il tend à s'en écarter d'avantage [9]. Cette définition est claire pour beaucoup de systèmes : Un bille au fond d'une coupe est en équilibre stable ; sur un oeuf en équilibre instable. Mais que pourra-t on dire d'une bille sur un plan horizontal uni. Si elle est déplacée de sa position initiale, elle ne tend pas à s'éloigner d'avantage, mais elle n'aura aucune tendance à y revenir. Sera-elle dite en équilibre stable ou en équilibre instable ?

L'exemple suivant montre la nécessité de donner une définition précise de la notion de stabilité :

Exemple 4.1 *Soit la figure 4.1 représentant une bille en équilibre sur des surfaces de différentes formes. le coefficient de frottement dynamique n'est pas nul.*



(a) (b) (c) (d) (e)

Figure 4.1 – Différentes situations d'équilibres [14]

Dans les cas 4.1(a), 4.1(b) et 4.1(c), il y a stabilité de l'équilibre, mais ces situations sont très différentes :

1. *Dans le cas 4.1(a), la bille revient toujours à son point d'équilibre quelque soit la perturbation envisagée (stabilité asymptotique globale).*
2. *Dans le cas 4.1(b), la bille peut accepter de petites perturbations, mais une perturbation trop grande lui fait quitter sa position d'équilibre (stabilité asymptotique locale).*
3. *Dans le cas4.1(c), la bille écartée de son point d'équilibre restera dans un voisinage de ce point. Il y a stabilité mais non asymptotique.*

Les cas 4.1(d) et 4.1(e) correspondent à des équilibres instables.

4.2 Systèmes autonomes

Cette section présente une classification des systèmes non linéaire en fonction de leur dépendance explicite du temps t et de la commande $u(t)$ [8].

4.2.1 Systèmes invariants, systèmes libres

La forme générale d'une équation d'état explicite d'un système non linéaire est donnée sous la relation suivante

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right) \tag{4.1}$$

Souvent, afin d'alléger l'écriture, les vecteurs d'état $\boldsymbol{x}(t)$ et de commande $\boldsymbol{u}(t)$ qui sont des fonctions du temps sont représenté sans la variable temps t, l'équation (4.1) se réécrit comme suit

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t\right) \tag{4.2}$$

Définition 4.1 (Système invariant) *Un système dynamique est dit **invariant dans le temps** ou tout simplement **invariant** si son équation d'état ne dépend pas explicitement du temps t. Son équation d'état est alors décrite par*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) \tag{4.3}$$

*Sinon, le système est dit **variant dans le temps**.*

Remarque 4.1 *Un système invariant en boucle ouverte décrit par l'équation d'état $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$ peut être rendu variant dans le temps par une commande qui dépend explicitement du temps $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t)$.*

Remarque 4.2 *On peut transformer un système non linéaire variant dans le temps en un système invariant en augmentant le vecteur d'état $\boldsymbol{x}(t)$ par une variable supplémentaire qui est le temps t*

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n(t) \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{4.4}$$

Définition 4.2 (Système libre) *Un système dynamique est dit **libre** si son équation d'état est indépendante de la commande $\boldsymbol{u}(t)$. Cette équation est alors*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t) \tag{4.5}$$

*Sinon, le système est dit **forcé**.*

4.2.2 Equation d'état tronquée

Dans le cas d'un *système commandé* (forcé) ou en *boucle fermée*, la commande $\boldsymbol{u}(t)$ peut être une fonction de l'état $\boldsymbol{x}(t)$ et du temps t :

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t) \tag{4.6}$$

en remplaçant cette commande dans l'équation d'état (4.1), l'expression de la commande $\boldsymbol{u}(t)$ disparaît dans la dynamique du système en boucle fermée et l'équation d'état devient

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t), t\right) = \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{x}(t), t\right). \tag{4.7}$$

C'est l'équation d'état d'un système non linéaire *libre* (*non forcé*).

Cette équation (4.7) peut également représenter la dynamique d'un système non linéaire où aucune commande n'est appliquée, *i.e.*, $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0}$ ou inexistante. Dans certaines références, l'équation d'état (4.7) est appelée *équation d'état tronquée* [6]. C'est cette équation d'état tronquée qui sera utilisée par la suite pour définir les notions préliminaires relatives à la stabilité des systèmes non linéaires. Ceci se justifie simplement, comme évoqué plus haut, par le fait qu'un système non commandé possède une commande nulle (ou qui peut être ramenée à zéro par un changement de variable) et qu'un système commandé (en boucle fermée) possède une commande qui dépend de l'état et du temps [1].

4.2.3 Systèmes autonomes

Si l'équation d'état est indépendante explicitement du temps et de la commande le système est alors dit *autonome*. Un système dynamique autonome est donc un système qui est à la fois invariants dans le temps et libre [8, 1].

Définition 4.3 (Systèmes Autonomes) *Un système dynamique invariant dans le temps et libre est dit* ***autonome****. Son équation d'état ne dépend que de l'état* $\boldsymbol{x}(t)$*. Elle est donnée par :*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) \tag{4.8}$$

Sinon, le système est dit ***non-autonome****.*

La différence fondamentale entre un système autonome et un système non autonome, est que *la trajectoire d'un système autonome est indépendante de l'instant initial* alors que *la trajectoire d'un système autonome dépend généralement de l'instant initial.* On peut donc ne pas considérer l'instant initial dans la définition de la stabilité d'un système autonome, ce qui ne sera pas le cas pour un système non autonome [1].

Dans la réalité, tous les systèmes physiques sont non autonomes. En effet, les grandeurs caractéristiques de ces systèmes (valeurs des coefficients de frottements, masses, inerties, resistance, inductances, ...) varient dans le temps. Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice comme dans le cas des systèmes linéaires. Cependant, dans beaucoup de cas pratiques, les valeurs des caractéristiques des systèmes varient très lentement dans le temps. On peut alors négliger leur variations sans introduire une erreur significative [1]

Remarque 4.3 *Un système autonome, et de façon générale un système invariant restent inchangés par un changement de la variable temp* $t' = t - t_0$*, vu que leur équation d'état est indépendante explicitement du temps* t*.*

L'exemple suivant illustre les différentes situations décrites dans cette section :

Exemple 4.2 (Système masse-ressort) *On considère le système masse-ressort représenté sur la figure* **??** *L poids de la masse* m *est compensé par la réaction perpendiculaire du sol. En plus de ces forces, la masse est soumise à une force de frottements visqueux* F_f *horizontale et opposée au mouvement, à la force de rappel du ressort* F_r *et à une force extérieure* F *(Il peut s'agir par exemple d'une force exercée par un électro-aimant si la masse est métallique). La masse est repérée par sa position* y *sur un axe horizontal qui à pour origine la position d'équilibre. La deuxième loi de Newton permet d'écrire*

$$m\ddot{y} = F_f + F_r + F \tag{4.9}$$

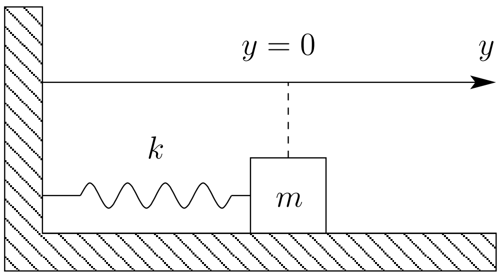


Figure 4.2 – Système masse-ressort.

On suppose que les expression des F_f et F_r sont données par

$$F_r = -ky(1 + a^2y^2) \tag{4.10}$$

et

$$F_f = -\mu\dot{y}. \tag{4.11}$$

ce qui donne l'équation dynamique suivante

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + ky + ka^2y^3 = F(t) \tag{4.12}$$

En choisissant $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$ comme variables d'état, on obtient la représentation d'état suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}a^2x_1^3 - \frac{\mu}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m} \end{array}\right. \tag{4.13}$$

— *Si on choisit $F(t)$ comme une entrée extérieure qui est une fonction du temps non nulle, le système est non stationnaire,*
— *Si on choisit $F(t)$ comme une fonction de $x(t) = [x_1(t)x_2(t)]$, le système devient autonome,*
— *Si on choisit une entrée nulle $F(t) = 0$, le système est aussi autonome.*

4.3 Points d'équilibre

La trajectoire d'un système peut être confondue à un seul point appelé *point d'équilibre.* Ces trajectoires sont des trajectoire triviales obtenues en résolvant une équation algébrique non linéaire.

4.3.1 Définition d'un point d'équilibre

Définition 4.4 (Point d'équilibre) *Soit le système non linéaire autonome décrit par l'équation d'état (4.5)*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Le point $\boldsymbol{x}_e$ est un point d'équilibre (ou état d'équilibre) du système s'il est solution du système d'équations algébriques

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e) \tag{4.14}$$

Selon la définition, les points d'équilibres sont retrouvés en résolvant l'équation algébrique (4.14). Contrairement à un système linéaire, un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibre isolés, voir une infinité.

Remarque 4.4 *Un point d'équilibre peut être défini comme un point à partir duquel le système autonome 4.8. Si une fois que, à un instant donné t_0, $\boldsymbol{x}(t)$ est égal à $\boldsymbol{x}_e$, il reste égal à $\boldsymbol{x}_e$ pour tout instant ultérieur :*

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_e \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_e, \forall t \geq t_0$$

Exemple 4.3 (Points d'équilibres d'un pendule simple) *Soit le pendule simple (figure 4.2) décrit par la représentation d'état*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Les point d'équilibre sont donnés par

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & x_2 \\ 0 & = & x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1 \end{array}$$

soit $x_2 = 0$, $\sin x_1 = 0$, ce qui conduit aux deux points d'équilibre $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e_1}}(0[2\pi], 0)$ et $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e_2}}(\pi[2\pi], 0)$. Ils correspondent physiquement aux positions verticales vers le haut et vers le bas.

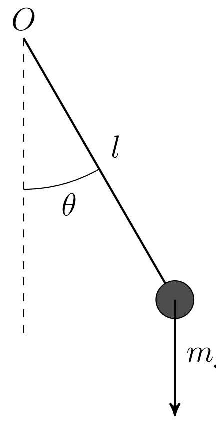


Figure 4.3 – Pendule simple.

L'exemple suivant montre qu'un système non linéaire peut avoir trois points d'équilibre isolés

Exemple 4.4 (Système de Lorentz) *Soit le système de Lorentz [15]*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 & = & \rho x_1 - x_2 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 & = & -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{array}$$

où σ, ρ, $\beta > 0$, avec $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1(\rho - 1 - x_3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_3 = \rho - 1 \\ \dot{x}_3 = 0 \Rightarrow x_1^2 = \beta x_3 \end{cases}$$

Le système possède alors trois points d'équilibre

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e_1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e_2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e_3}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \rho - 1 \end{bmatrix}$$

4.3.2 Points d'équilibres d'un système linéaire

Soit le système linéaire autonome décrit par l'équation d'état linéaire

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{4.16}$$

— Si A est non singulière, *i.e.* $det(A) \neq 0$, alors $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est le seul point d'équilibre.
— Si A est singulière ($det(A) = 0$), alors le système a une infinité de points d'équilibres formant le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ définis par $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ [1].

4.4 Stabilité au sens de Lyapunov

La théorie de la stabilité de Lyapunov est une théorie générale permettant de définir et de tester la stabilité d'un système dynamique [16].

4.4.1 Stabilité d'un point d'équilibre

La stabilité simple implique que si l'état initial $\boldsymbol{x}(t_0)$ est proche du point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$, il en sera de même de la trajectoire d'évolution future $\boldsymbol{x}(t)$ pour $t \geq t_0$ [14, 16].

Dans ce qui suit, on considère le système autonome

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n \tag{4.17}$$

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage du point d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$, $t \in [0, t_f)\,,\quad 0 \leq t_f \leq +\infty$. La fonction vectorielle $\boldsymbol{f}(.)$ est Lipschitzienne sur $\mathcal{D}$

Définition 4.5 (Stabilité d'un point d'équilibre) *Le point d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$ du système 4.17 est **stable** au sens de Lyapunov si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_e\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \tag{4.18}$$

Le point d'équilibre est dit instable *s'il n'est pas stable.*

4.4.2 Définition topologique de la stabilité

La définition de la stabilité d'un point d'équilibre peut être reformulée en faisant appel aux notions de boule et de sphère.

On rappel les définitions topologiques d'une sphère et d'une boule par rapport à une norme $\|.\|$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.6 (Sphère et boule) *Une sphère de rayon r, notée $\mathcal{S}_r$ est l'ensemble de points définis par*

$$\mathcal{S}_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| = r\} \tag{4.19}$$

Une boule de rayon r, notée $\mathcal{B}_r$ est l'ensemble de points définis par

$$\mathcal{B}_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| < r\} \tag{4.20}$$

La définition de la stabilité est alors reformulé comme suit :

Définition 4.7 (Stabilité d'un point d'équilibre) *Le point d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$ du système 4.17 est **stable** si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ x(t_0) \in \mathcal{B}_{\delta(\varepsilon)} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{B}_\varepsilon,\ \forall t \geq t_0 \tag{4.21}$$

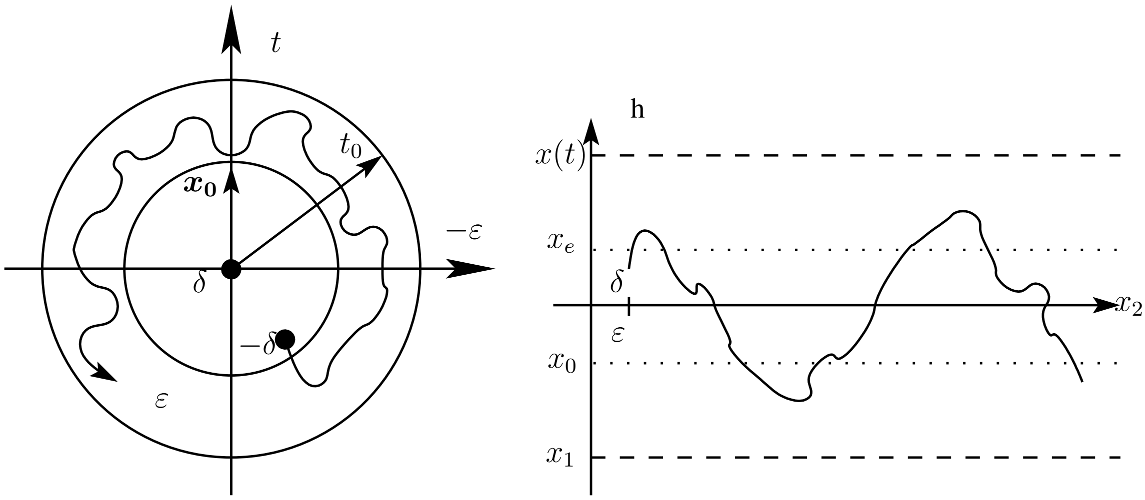
Le point d'équilibre est dit instable *s'il n'est pas stable.*

Cette deuxième définition est illustré graphiquement par la figure 4.4.

4.4.3 Interprétation de la notion de stabilité

Si un point d'équilibre est stable, cela signifie qu'on peut garder la trajectoire du système aussi proche du point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ que l'on souhaite, à condition que l'état initial $\boldsymbol{x}(t_0)$ y soit suffisamment proche comme le montre la figure 4.4[14, 16].

En termes de perturbations, un système est stable si une faible perturbation dans les conditions initiales (l'écart (perturbation) $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_e\|$ à l'instant initial t_0 est borné par $\delta(\varepsilon)$), entraîne une faible perturbation dans les conditions futures (l'écart $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e\|$ est borné par ε). Ceci est illustré par la figure 4.4 dans laquelle on suppose que $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$, ce qui n'enlève rien à la généralité de l'interprétation comme il est expliqué dans la section 4.4.4.



(a) Système d'ordre 1 (b) Système d'ordre 2

Figure 4.4 – Interprétation de la stabilité

Remarque 4.5

Comme le système $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ est invariant, on obtient une définition équivalente de la stabilité de celle donnée en (4.5) en considérant $t_0 = 0$. Ceci reviendrai à faire un changement de variable en posant $t' = t - t_0$. Ainsi, le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x_e}\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_e}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \tag{4.22}$$

avec $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(0)$

4.4.4 Stabilité autour de l'origine

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ quelconque peut se ramener à l'étude de la stabilité du point origine $\mathbf{0}$. En effet, en posant le changement de variable

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e \tag{4.23}$$

et en remplaçant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_e$ dans (4.8), on obtient un système équivalent qui a pour équation d'état

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_e) \tag{4.24}$$

avec $\boldsymbol{y}$ comme vecteur d'état et $\boldsymbol{y}_e = \mathbf{0}$ comme point d'équilibre correspondant à $\boldsymbol{x}_e$ dans l'ancien système [1].

4.4.5 Stabilité autour d'une trajectoire

Souvent, on est amené à l'étude de la stabilité d'un système autour d'une trajectoire nominale. Ce problème revient à savoir si un système restera toujours proche de sa trajectoire s'il est perturbé au cours de son mouvement. On appellera *trajectoire nominale* la trajectoire du système pour un condition initiale définie.

Soit $\boldsymbol{x}^{nom}(t)$ la trajectoire nominale du système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ avec comme condition initiale $\boldsymbol{x}^{nom}(t_0) = \boldsymbol{x}_{t_0}$ à l'instant t_0. Supposons maintenant que le système soit perturbé à cet instant. Il partira alors d'une nouvelle condition initiale $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_{t_0} + \boldsymbol{\delta x}_{t_0}$. L'écart $\boldsymbol{e}(t)$ entre la trajectoire perturbée et la trajectoire nominale est donné par

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^{nom}(t) \tag{4.25}$$

L'équation d'état de l'erreur $\boldsymbol{e}(t)$ est

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}(t) &= \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}^{nom}(t) \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{nom}(t) + \boldsymbol{e}(t)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{nom}(t)) \\ &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}, t) \end{aligned} \tag{4.26}$$

avec comme condition initiale $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\delta x}^{nom}$. Comme $\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, le nouveau système à l'origine comme point d'équilibre. L'étude de la déviation de la trajectoire revient à l'étude de la stabilité du nouveau système autour de l'origine.

Il est important de remarquer que le nouveau système est non-autonome à cause de la dépendance de $\boldsymbol{x}^{nom}(t)$ qui est une fonction explicite du temps. A chaque trajectoire nominale $\boldsymbol{x}^{nom}(t)$ correspond donc un nouveau système non-autonome [1].

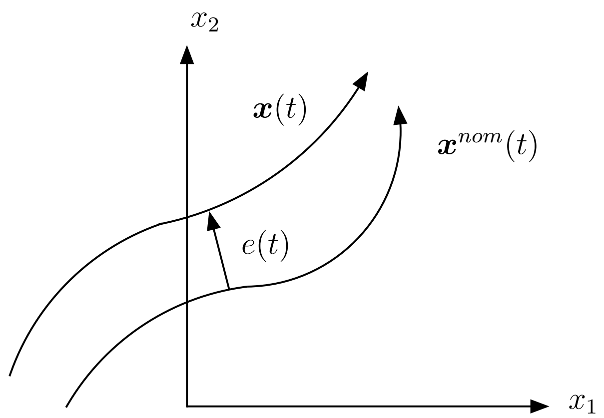


Figure 4.5 – Stabilité autour d'une trajectoire.

4.5 Stabilité asymptotique

Dans beaucoup de cas, la stabilité au sens de Lyapunov n'est pas suffisante. Quand un satellite est perturbé de sa trajectoire nominale, Il n'est pas très intéressant de le maintenir autour de cette trajectoire dans une marge déterminée par l'amplitude de la perturbation (stabilité au sens de Lyapunov), il serait plus intéressant de le ramener à celle-ci [1]. Cette notion est appelée *stabilité asymptotique.*

4.5.1 Point attractif

Définition 4.8 (Point attractif) *Le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ du système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est **localement attractif** si*

$$\exists\gamma > 0 : \|x(t_0) - x_e\| < \gamma \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_e} \tag{4.27}$$

Une autre formulation de cette définition , obtenue à partir de la définition de la limite de $\boldsymbol{x}(t)$ quand $t \to +\infty$ est la suivante :

Le point d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$ est localement attractif si

$$\exists\gamma > 0, \forall\varepsilon_1, \exists T(\varepsilon_1 : \|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x_e}\| < \gamma \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_e}\| < \varepsilon_1, \forall \geq t_0 + T(\varepsilon_1) \tag{4.28}$$

4.5.2 Domaine d'attraction

Le domaine d'attraction représente l'ensemble des points de l'espace d'état pour lesquels, si une trajectoire démarre à partir de l'un de ces points, à un instant t_0 quelconque, alors la trajectoire convergera vers le point d'équilibre [17].

Définition 4.9 (Domaine d'attraction) *Soit $\boldsymbol{x}_e$ un point d'équilibre attractif du système (4.5). On appel domaine d'attraction de ce point le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ noté $D(\boldsymbol{x}_e)$ et qui et définit par*

$$D(\boldsymbol{x}_e) = \left\{ \boldsymbol{x}_{at} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_{at} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \right\}. \tag{4.29}$$

L'attractivité exprime que que si l'état initial est dans un certain voisinage du point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$, l'état du système reviendra nécessairement au point d'équilibre [14].

4.5.3 Stabilité asymptotique

Définition 4.10 (Stabilité asymptotique locale) *Le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ du système (4.17) est* localement asymptotiquement stable *s'il est **stable** et **localement attractif**.*

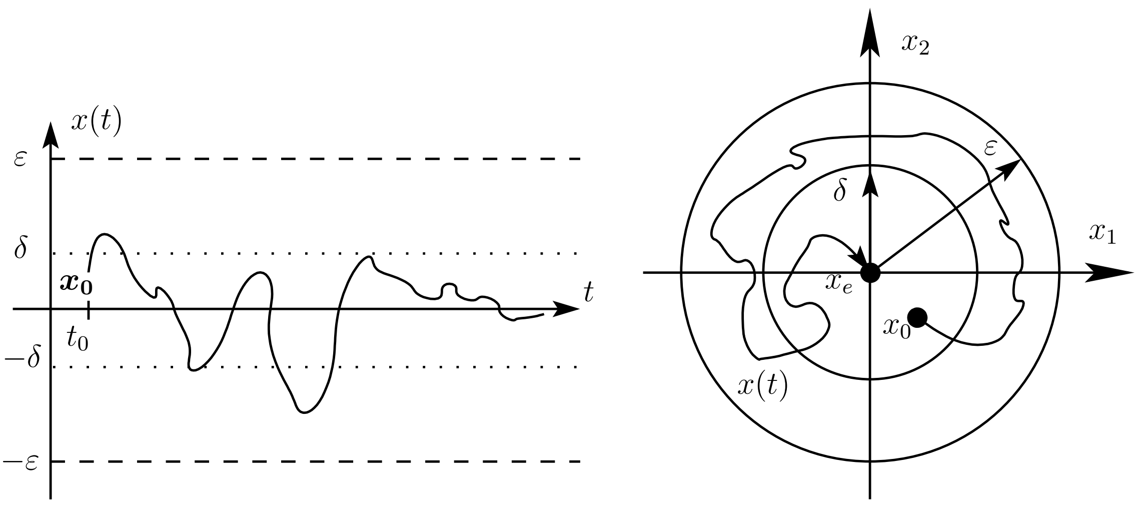
La stabilité asymptotique est une condition plus forte qui exige en plus de la stabilité que le système retourne asymptotiquement vers le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ [16]. En pratique, la stabilité asymptotique exprime que la trajectoire du système perturbé ne s'éloignera pas trop de son point d'équilibre (stabilité) et convergera vers le point d'équilibre (attractivité) [14](figure 4.6).

Remarque 4.6 *Un système stable mais qui n'est pas asymptotiquement stable est dit **marginalement stable** (figure 4.4). La stabilité simple est aussi appelé **stabilité marginale**.*

L'exemple suivant montre un système qui possède un point d'équilibre stable mais non attractif. Il s'agit alors d'un point d'équilibre stable mais qui n'est pas asymptotiquement stable

Exemple 4.5 (Point d'équilibre marginalement stable) *Soit le système du second ordre*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1. \end{cases} \tag{4.30}$$



(a) Système d'ordre 1

(b) Système d'ordre 2

Figure 4.6 – Interprétation de la stabilité asymptotique

Les trajectoires d'état (solutions du système) sont données par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_0)\cos(t-t_0) - x_2(t_0)\sin(t-t_0) \\ x_2(t) &= x_1(t_0)\sin(t-t_0) + x_2(t_0)\cos(t-t_0) \end{aligned}$$

on peut alors écrire que la norme du vecteur d'état reste inchangée

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0)$$

Il suffit alors de choisir $\delta = \varepsilon$. Dans ce cas, si $\|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$ on aura $\|\boldsymbol{x}(t)\| = \|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \varepsilon$, ce qui montre que l'origine est un point d'équilibre stable. Par contre, comme

$$\lim_{t\to\infty}(x_1^2(t) + x_2^2(t)) = x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0)$$

alors $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) \neq \mathbf{0}$. L'origine n'est pas asymptotiquement stable.

L'exemple qui suit est celui d'un système asymptotiquement stable

Exemple 4.6 (Point d'équilibre asymptotiquement stable) *Soit le système non linéaire du premier ordre*

$$\dot{x} = -x^3 \tag{4.31}$$

pour ne condition initiale $x(t_0) = x_{t_0}$, on montre que la solution de l'équation d'état est

$$x(t) = x_{t_0}\left(1 + 2x_{t_0}^2(t-t_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.32}$$

Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il suffit de prendre $\delta = 0$ tel que si $|x_{t_0}| < \delta$ on aura $|x_t| < \varepsilon$.

De même, on vérifie directement d'après la forme générale de la solution (4.32) que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$. *Le point d'équilibre est asymptotiquement stable.*

4.5.4 Stabilité exponentielle

Définition 4.11 (Stabilité exponentielle locale) *Le point d'équilibre* $\boldsymbol{x_e}$ *du système (4.17) est* localement exponentiellement stable *s'il existe trois constantes réelles positives* $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *tel que*

$$\|x(t_0) - x_e\| < \gamma \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \alpha \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}, \ \forall t \geq t_0. \tag{4.33}$$

La stabilité exponentielle traduit le fait que la vitesse de convergence vers l'état d'équilibre est bornée par une exponentielle décroissante [18].

4.6 Stabilité globale

Les propriétés de stabilité définies précédemment sont valables dans un contexte local. Un système qui vérifie ces propriétés est dit *localement stable* autour du point d'équilibre. Elles donnent peu d'informations quand l'état initial du système est assez éloigné du point d'équilibre [1]. Si les propriétés de stabilité et d'attractivité sont valable quelque soit l'état initial $\boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$, le système est dit *globalement stable* . On donnera ici les définitions de la stabilité asymptotique locale et globale [18, 17].

Définition 4.12 (Stabilité asymptotique globale) *Soit le système non linéaire* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *avec* $\boldsymbol{f}$ *une application Lipschitzienne. Le point d'équilibre* $\boldsymbol{x}_e$ *est* ***globalement asymptotiquement stable*** *s'il est stable et que* $\forall \boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$: $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_e}$

Cette définition revient à dire que le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et que son domaine d'attraction est égal à $\mathbb{R}^n$. A ce moment là, toutes les trajectoires convergent asymptotiquement vers le point d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$ quelque soit le point de départ $\boldsymbol{x}(t_0)$. L'exemple suivant montre un système qui est exponentiellement stable mais qui n'est pas globalement stable

Exemple 4.7 (Système localement exponentiellement stable) *On considère le système suivant*

$$\dot{x} = -x + x^2 \tag{4.34}$$

la solution générale de cette équation est

$$x(t) = \frac{x_{t_0} e^{(-(t-t_0))}}{x_{t_0} e^{(-(t-t_0))} - x_{t_0} + 1}$$

En considérant la région $D_0 = \{x, \|x\| \leq r_0 < 1\}$, *quel que soit* $\varepsilon > 0$, *en choisissant* $\delta = \min r_0, (1 - r_0)\varepsilon$ *alors pour tout* $t \geq t_0$ *et* $|x_{t_0}| < \delta$ *on a*

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \frac{|x_0| e^{-(t-t_0)}}{1 - x_0 \left(1 - e^{-(t-t_0)}\right)} \leq |x_0| e^{-(t-t_0)} \\ &< \varepsilon e^{-(t-t_0)} \leq \varepsilon \quad \textit{pour } - r_0 \leq x_{t_0} \leq 0 \end{aligned}$$

Remarque 4.7 — *Un système non linéaire peut admettre plusieurs point d'équilibre localement asymptotiquement stables mais il ne peut admettre qu'un seul point d'équilibre globalement stable. En effet, s'il existe plus d'un point d'équilibre globalement stable, si le système converge vers l'un d'eux, les autres ne seraient pas globalement stable.*

— *Dans le cas d'un SLTI, les stabilité locale et globales sont confondues.*

Définition 4.13 (Stabilité exponentielle globale) *Soit le système non linéaire* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *avec* $\boldsymbol{f}$ *une application Lipschitzienne. Le point d'équilibre* $\boldsymbol{x}_e$ *est globalement exponentiellement stable s'il existe deux constantes réelle* $\alpha, \beta > 0$ *tel que*

$$\forall \boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_e}\| \leq \alpha \|\boldsymbol{x}(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}$$

4.7 Rappel sur la Stabilité des Systèmes Linéaires

Soit le SLTI autonome

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{4.35}$$

Il a un point d'équilibre à l'origine $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$. Ce point d'équilibre est isolé si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si $\det(A) = 0$, tout point du sous-espace $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est un point d'équilibre. Le système a alors un sous-espace d'équilibre. Le système ne peut pas avoir de points d'équilibre isolés. Le théorème suivant caractérise la stabilité du SLTI en fonction des valeurs propres de A notées λ_i.

Théorème 4.1 (Stabilité d'un système linéaire[19]) — *Le point d'équilibre* $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$ *du système* $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ *est stable si et seulement si :*

1. $\forall \lambda_i, \ \mathrm{Re}\{\lambda_i\} \leq 0$.
2. *Si* λ_i *est une valeur propre tel que* $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0$ *de multiplicité algébrique* $q_i \geq 2$, *alors rang*$(A - \lambda_i) = n - q_i$, *où* n *est la dimension de* $\boldsymbol{x}$.

— *Le point d'équilibre* $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$ *du système* $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ *est asymptotiquement stable si et seulement si* $\forall \lambda_i, \ \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$.

Exemple 4.8 *[19] Soit les connection en série et en parallèle de deux systèmes identiques. Chacun est décrit par le modèle d'état*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{4.36}$$

Soit A_s *et* A_p *les matrices d'état des système mis en série et parallèle. On montre (à voir en TD) que*

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les deux matrices ont les mêmes valeurs propres sur l'axe imaginaire $\pm j$, *avec* $j^2 = -1$. *On montre alors que rang*$(\boldsymbol{A_p} - \boldsymbol{jI}) = \mathbf{2} = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{q_i}$, *alors que rang*$(A_s - jI) = 3 \neq n - q_i$. *Par conséquent, la mise en parallèle donne un point d'équilibre stable à l'origine et la mise en série donne un point d'équilibre instable à l'origine.*

4.8 Première Méthode de Lyapunov

Les méthodes de Lyapunov permettent l'analyse de la stabilité d'un système non linéaire sans avoir recours aux définitions de la stabilité donnée précédemment. En effet, ceci nécessiterai la connaissance de la solution de l'équation différentielle d'état non linéaire. La première méthode, appelée également méthode indirecte de Lyapunov [], permet l'étude de la stabilité locale d'un système non linéaire autonome à partir du modèle linéarisé tangent autour du point d'équilibre. La seconde méthode appelée également méthode directe de Lyapunov permet de tirer des conclusions sur la stabilité globale en utilisant une fonction similaire à l'énergie du système.

4.8.1 Linéarisé tangent

Soit le processus décrit dans l'espace d'état par l'équation suivante

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}\boldsymbol{x} \tag{4.37}$$

On suppose que le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ est ramenée à l'origine. On considérera donc par la suite que $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ est un point d'équilibre, *i.e.*, $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = 0$. Le développement en série de Taylor du premier ordre de la fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ au voisinage de l'origine s'écrit

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \circ(\|\boldsymbol{x}\|) \tag{4.38}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, le système non linéaire est approximé au voisinage de $\mathbf{0}$ par un système linéaire dont la représentation d'état est donnée par

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{4.39}$$

avec

$$A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}\right|_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Ce système s'appel *le linéarisé tangent* du système original.

Exemple 4.9 *[15] Considérons de nouveau le système de Lorentz*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{aligned}$$

où $\sigma,\ \rho,\ \beta > 0$ *. Le système possède trois points d'équilibre*

$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad x_{e2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & \rho - 1 \end{bmatrix}^T$$
$$x_{e3} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\sqrt{\beta(\rho-1)} & \rho - 1 \end{bmatrix}^T$$

Selon le point d'équilibre considéré, le linéarisé tangent est

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_i \boldsymbol{x}$$

avec

$$A_i = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - x_{ei}[3] & -1 & -x_{ei}[1] \\ x_{ei}[2] & x_{ei}[1] & -\beta \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2$ *où* 3.

Remarque 4.8 (Linéarisé tangent d'un système commandé) *On peut également linéariser un système non linéaire forcé*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{4.41}$$

tel que

$$f(x_e, u_e) = 0$$

on peut alors écrire

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x=x_e, u=u_e)} \cdot x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x=x_e, u=u_e)} \cdot u + f_{tos}(x, u)$$

où

$$f_{tos}(x, u)$$

sont les termes d'ordre supérieur en $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{u}$.

Le système

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.42}$$

avec

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x=x_e, u=u_e)} \quad , \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x=x_e, u=u_e)}$$

est le linéarisé tangent du système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ *au point* $(\boldsymbol{x_e}, \boldsymbol{u_e})$.

4.8.2 Première méthode de Lyapunov

Une approximation locale de la dynamique d'un système non linéaire autour d'un point d'équilibre permet, dans certains cas, de déduire la stabilité locale du système original (non linéaire). Ceci est possible grace à la méthode indirecte de Lyapunov [20].

Théorème 4.2 (Première méthode de Lyapunov) *Soit le système non linéaire autonome* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, *et* $A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0$ *la matrice d'état du linéarisé tangent autour de* $\mathbf{0}$. *On pose*

$$\Lambda = \lambda(A)$$

l'ensemble de valeurs propres de A

- $\forall \lambda \in \Lambda, \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow x = 0$ *est* ***asymptotiquement stable***.
- $\exists \lambda \in \Lambda \forall \lambda \in \Lambda, \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow x = 0$ *est* ***instable***.
- $\forall \lambda \in \Lambda, \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0 et \exists \lambda_1 \in \Lambda \mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$ ***on ne peut rien conclure***.

- Si la méthode indirecte de Lyapunov permet de conclure qu'un point d'équilibre est stable, ce résultat sera seulement valable dans un voisinage du point d'équilibre (stabilité locale).
- Si la méthode indirecte de Lyapunov permet de conclure qu'un point d'équilibre est instable, il ne sera pas nécessaire de faire une étude plus poussée de la stabilité (méthode directe). C'est dans ce cas que la méthode directe trouve toute son utilité.

4.9 Deuxième méthode de Lyapunov

L'utilisation de la méthode indirecte de Lyapunov n'est pas d'une grande utilité si la condition initiale (point de départ du système) ne se trouve pas dans un voisinage suffisamment proche du point d'équilibre [8]. La méthode directe de Lyapunov est une méthode générale qui permet l'étude de la stabilité d'un système non linéaire sans avoir à résoudre l'équation d'état non linéaire ou utiliser le modèle linéarisé. La méthode directe de Lyapunov est l'outil le plus largement utilisé pour l'analyse et la commande des systèmes non linéaires.

L'idée de la méthode directe de Lyapunov est de fournir une formalisation mathématique d'un raisonnement énergétique [8] :

- **Le comportement d'un système est stable lorsque** [20] :
  - Son énergie E diminue et est minimum au point d'équilibre.
  - L'énergie E est conservée et E est minimum à l'équilibre.
- Par contre, **le comportement est instable lorsque** [20] :
  - L'énergie E augmente.
  - L'énergie E est conservée mais elle ne correspond pas à un minimum à l'équilibre.

En résumé, l'énergie d'un système stable est constante ou diminue avec un minimum à l'équilibre.

4.9.1 Fonctions définies positives et fonctions de Lyapunov

La seconde méthode de Lyapunov est basée sur une procédure qui consiste à trouver une fonction scalaire jouant le rôle de l'énergie pour le système non linéaire étudié. Grâce à cette méthode, l'analyse des variations de cette fonction (croissance, décroissance) permet de conclure sur la stabilité du système sans résoudre le système d'quation diffrentielle et avoir recours aux définitions de la stabilité [8]. Afin d'alléger les notations, on supposera que le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ est ramené à l'origine, c'est à dire que $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ est un point d'équilibre.

Définition 4.14 (Fonction définie positive[8]) *Une fonction scalaire $V(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite **localement définie positive** s'il existe une région $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine telle que :*

$$V(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega} - \{0\} \text{ et } V(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ pour } \boldsymbol{x} = 0 \tag{4.43}$$

*$V(\boldsymbol{x})$ est dite **globalement définie positive** si $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{R}^n$.*

De la même manière :

- *$V(\boldsymbol{x})$ est dite **définie négative** si $-V(\boldsymbol{x})$ est **définie positive**.*
- *$V(\boldsymbol{x})$ est dite **semi-définie positive** si $V(\mathbf{0}) = 0$ et $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$ pour $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.*
- *$V(\boldsymbol{x})$ est dite **semi-définie négative** si si $-V(\boldsymbol{x})$ est **semi-définie positive**.*

La notion de fonction définie positive traduit le fait que la fonction utilisée est positive (comme l'énergie) et nulle uniquement à l'état d'équilibre (énergie minimale).

Définition 4.15 (Fonction de Lyapunov) *Une* fonction de Lyapunov *est une fonction continue $V(\boldsymbol{x})$, définie positive dans une région $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, vérifiant la propriété suivante*

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0 \text{ et } \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ pour } \boldsymbol{x} = 0 \tag{4.44}$$

pour n'importe quelle trajectoire dans $\boldsymbol{\Omega}$.

Remarque 4.9 *En d'autres termes, une fonction de Lyapunov est une fonction qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{llll} V(\boldsymbol{x}) > 0 & \forall \boldsymbol{x} \neq 0, & V(\boldsymbol{x}) = 0 & \boldsymbol{x} = 0 \\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0 & \forall \boldsymbol{x} \neq 0, & \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 & \boldsymbol{x} = 0 \end{array} \tag{4.45}$$

Les fonctions de Lyapunov traduisent le fait que ces fonctions définies positives décroissent le long des trajectoires d'état (l'énergie diminue) [8].

4.9.2 Théorème de Lyapunov pour la stabilité locale

Théorème 4.3 (Théorème de la stabilité locale) *Si $\exists \mathcal{B}_{R_0}$ telle que*

— $V(\boldsymbol{x}) > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_{R_0},\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

— $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_{R_0}$

*alors le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ est **stable**. Si de plus*

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_{R_0} ? \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$$

*le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ est **asymptotiquement stable.***

Théorème 4.4 (Deuxième méthode de Lyapunov-forme locale) *Soit le système non linéaire autonome $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. L'application $\boldsymbol{f}$ est Lipschitzienne sur $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine $\boldsymbol{x_e}$ qui est un point d'équilibre. S'il existe une fonction scalaire $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continûment différentiable vérifiant :*

1. $V(\mathbf{0}) = 0 et V(\boldsymbol{x} > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} - \{\mathbf{0}\},$
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D},$

alors $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$ est localement stable.
Si de plus :

1. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} - \{\mathbf{0}\},$

alors $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$ est localement asymptotiquement stable.

En utilisant définition d'une fonction de Lyapunov, la forme abrégé du théorème précédent devient

Théorème 4.5 (Deuxième méthode de Lyapunov-forme locale) *Soit le système non linéaire autonome $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. L'application $\boldsymbol{f}$ est Lipschitzienne sur $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine $\boldsymbol{x_e}$ qui est un point d'équilibre. Si une fonction de Lypounov $V(\boldsymbol{x})$ existe pour ce système dans $\mathcal{D}$, alors le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ est **stable**.*

De plus, si la fonction de Lyapunov $V(\boldsymbol{x})$ est strictement décroissante, i.e. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} - \{\mathbf{0}\}$, alors le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable *;*

Exemple 4.10 *voir [8] pp 76. +++*

4.9.3 Théorème de Lyapunov pour la stabilité globale

Théorème 4.6 (Deuxième méthode de Lyapunov-forme globale) *Soit le système non linéaire autonome* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *. On suppose que l'application* $\boldsymbol{f}$ *est Lipschitzienne sur* $\mathbb{R}^n$ *et que l'origine* $\boldsymbol{x_e}$ *est un point d'équilibre. S'il existe une fonction scalaire* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continûment différentiable qui vérifie :*

1. $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(\boldsymbol{x}) = +\infty$ *(*$V(.)$ *est radialement non bornée),*
2. $V(\mathbf{0}) = 0$ *et* $V(\boldsymbol{x}) \neq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$*,*
3. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$*,*

alors le point d'équilibre $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$ *est* globalement asymptotiquement stable.

La condition supplémentaire par rapport à la stabilité locale

$$V(x) \to 0 \; lorsque \; \|x\| \to 0$$

traduit le fait que les courbes de niveau $V(\boldsymbol{x}) = C^{te}$ sont fermées.
De même, la forme abrégé du théorème de stabilité globale est

Exemple 4.11 (Stabilité globale) *Soit le système du second ordre, [15]*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1 x_2 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$
On choisit $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$*, on a alors* $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2(x_1^2 + x_2) < 0$*, l'origine est donc un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Théorème 4.7 (Stabilité exponentielle) *Soit le système non linéaire* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$*. L'application* $\boldsymbol{f}$ *est Lipshcitzienne sur* $\mathcal{D}$ *et* $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0} \in \mathcal{D}$ *est un point d'équilibre. S'il existe une fonction scalaire* $V(\boldsymbol{x}) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *continûment différentiable et des constantes* $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ *et* $p \geq 1$ *tel que :*

1. $\alpha \|\boldsymbol{x}\|^p \leq V(\boldsymbol{x}) \leq \beta \|\boldsymbol{x}\|^p, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$*,*
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq -\varepsilon V(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$*.*

alors l'origine est exponentiellement stable. *Si ces hypothèses sont vérifiées globalement (*$\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$*), alors l'origine* $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ *est* globalement exponentiellement stable.

4.10 Principe d'invariance de LaSalle

Il est plus important de démontrer la stabilité asymptotique d'un système de commande que de démontrer seulement sa stabilité. Cependant, il arrive souvent que les conditions suffisantes pour démontrer la stabilité, vues dans les théorèmes précédents (deuxième méthode de Lyapunov sous forme locale et globale) ne soient pas réunies.

En effet, ce théorèmes exigent que la dérivée temporelle de la fonction candidate $\dot{V}(.)$ soit définie négative ($\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$) pour assurer la convergence asymptotique, mais il arrive souvent que cette dérivée soit seulement semi-définie négative ($\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$), ce qui permet seulement de conclure à la stabilité. La théorie des ensembles invariants, introduite par LaSalle, offre outil très utile pour conclure dans ce cas ($\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$) à la stabilité asymptotique, aussi bien localement que globalement.

4.10.1 Ensemble invariant

La notion d'ensemble invariant est une généralisation de celle d'un point d'équilibre, qui en est donc un cas particulier. La définition exacte de ce concept est donnée ci-dessous

Définition 4.16 (Ensemble invariant) *Un ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble invariant pour un système dynamique si toutes les trajectoires du système qui démarrent dans $\mathcal{M}$ restent dans $\mathcal{M}$:*

$$\forall \boldsymbol{x}(t_0) : \boldsymbol{x}(t_0) \in \mathcal{M} \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{M}, \forall t \geq t_0$$

Ceci est illustré sur la figure **??** Un exemple trivial d'ensemble invariant est tout point

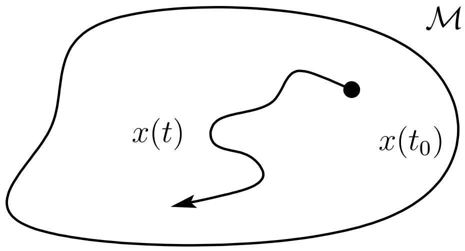


Figure 4.7 – Ensemble invariant.

d'équilibre. En effet, si $\boldsymbol{x_e}$ est un point d'équilibre, alors si $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_e}$, on aura $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_e}$ pour tout $t \geq t_0$. De même, l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ est un autre exemple d'ensemble invariant.

Pour un système autonome, toute trajectoire dans l'espace d'état est un espace invariant ; c'est le cas notamment des cycles limites qui sont des trajectoires fermées dans l'espace d'état.

4.10.2 Forme locale de la théorie des ensembles invariants

La théorie des ensemble invariants permet de montrer la stabilité dans des conditions moins restrictives que celles des théorèmes de la méthode directe de Lyapunov. Elle permet aussi de généraliser la notion de convergence vers un point d'équilibre à celle de convergence vers une trajectoire, comme par exemple la convergence vers un cycle limite.

On donnera d'abord dans l'énoncé principe d'invariance de LaSalle appelé aussi dans la littérature principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle. On par verra la suite que ce principe permet de relâcher l'une des conditions sur la fonction de Lyapunov $V(.)$ donnée par les théorèmes de Lyapunov sur la stabilité asymptotique, à savoir que $\dot{V}(.)$ soit strictement définie négative.

Théorème 4.8 (Barbashin-Krasovskii-LaSalle) *Soit le système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}\mathcal{D} :\to \mathbb{R}^n$, avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine. On suppose que l'application $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_c$ un ensemble compact et invariant par rapport au système. On suppose qu'il existe une fonction scalaire $V : \mathcal{D}_d \to \mathbb{R}^n$ continûment différentiable et vérifiant $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_c$. Soit $\mathcal{R} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_c : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ et $\mathcal{M}$ le plus grand ensemble invariant contenu dans $\mathcal{R}$, alors si $\boldsymbol{x}(t_0) \in \mathcal{D}_c$, on aura $\boldsymbol{x}(t) \to \mathcal{M}$ quand $t \to +\infty$*

La signification géométrique de ce théorème est illustrée par la figure **??**

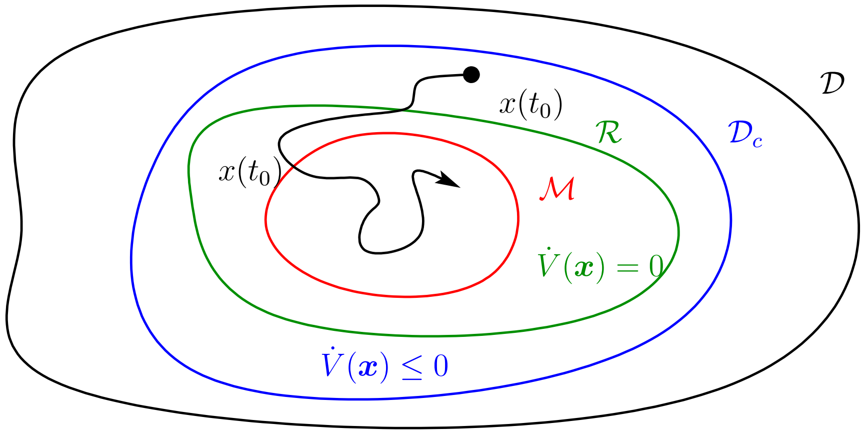


Figure 4.8 – Interprétation géométrique du théorème de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

Corollaire 4.1 (Stabilité locale par le principe d'invariance de LaSalle) *Soit le système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine. On suppose que l'application $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\mathcal{D}$. On suppose qu'il existe une fonction scalaire $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ continûment différentiable. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $V(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} - \{0\}$ *et* $V(\mathbf{0}) = 0$,
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$
3. *L'ensemble* $\mathcal{R} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_c : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ *ne contient totalement aucune trajectoire du système sauf la trajectoire triviale* $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$

alors le point d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$ est localement asymptotiquement stable.

De plus, tout sous-ensemble $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$ compact et invariant contenant l'origine $\boldsymbol{x_e} = \mathbf{0}$ fait partie du domaine d'attraction.

4.10.3 Forme globale de la théorie des ensembles invariants

Théorème 4.9 (Théorème des ensembles invariants : forme globale) *Soit le système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose que l'application $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une fonction scalaire $V : \mathcal{D}_d \to \mathbb{R}$ continûment différentiable et vérifiant*

1. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. $\lim_{\|\boldsymbol{x}\|} V(\boldsymbol{x}) = \infty$

Soit $\mathcal{R} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_c : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ et $\mathcal{M}$ le plus grand ensemble invariant contenu dans $\mathcal{R}$, alors toutes les trajectoires du système convergent aymptotiquement vers $\mathcal{M}$ quand $t \to +\infty$

Corollaire 4.2 (Stabilité globale par le principe d'invariance de LaSalle) *Soit le système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose que l'application $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une fonction scalaire $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $V(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ *et* $V(\mathbf{0}) = 0$,
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$
3. $\lim_{\|\boldsymbol{x}\|} V(\boldsymbol{x}) = \infty$ *($V(.)$ est radialement non bornée),*

4. *L'ensemble* $\mathcal{R} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ *ne contient totalement aucune trajectoire du système sauf la trajectoire triviale* $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$,

alors le point d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$ *est globalement asymptotiquement stable.*

4.11 Exercices

Exercice 4.1

Trouver les points d'équilibre des systèmes suivants :

$(a)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$ $\quad (b)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1^3 \end{cases}$

$(c)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - \dfrac{2x_2}{1+x_1}) \\ \dot{x}_2 = x_2(2 - \dfrac{x_2}{1+x_1}) \end{cases}$ $\quad (d)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - \dfrac{2x_2}{1+x_1}) \\ \dot{x}_2 = x_2(2 - \dfrac{x_2}{1+x_1}) \end{cases}$

$(e)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$ $\quad (f)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$

Exercice 4.2

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2 - \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^3$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^3$$

1. Trouver tous ses points d'équilibre,
2. En calculant le linéarisé tangent pour ces points, étudier la stabilité de chaque équiibre.

Exercice 4.3

Soit le système,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^2 \cos x_1 \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \cos^2 x_1 \end{cases}$$

— En utilisant le linéarisé tangent, montrer que l'origine est un point d'équilibre stable.

Exercice 4.4

Soit le système,

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -ax_1 - bx_2$$

1. Calculer ces points d'équilibre,
2. Calculer le linéarisé tangent en ce point,
3. Montrer que le point d'équilibre est stable,
4. Montrer que le point d'équilibre est globalement stable.

Exercice 4.5

Soit le système dynamique décrit par :

$$\dot{x} = Ax + \|x\|^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Où A est une matrice constante de Huruwitz et ω un paramètre constant positif. Déterminer par une analyse appropriée si le point d'équilibre est :

1. Globalement asymptotiquement stable,
2. Exponentiellement stable,
3. Globalement exponentiellement stable.

Exercice 4.6

Les équations d'Euler du mouvement d'un avion rigide sont données par :

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3 \end{aligned}$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les composantes du vecteur vitesse angulaire, u_1, u_2, u_3 les couples par rapport aux axes principaux et J_1, J_2, J_3 les moments d'inertie autour de ces axes.

1. Montrer que pour $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, l'origine est un point d'équilibre stable. Est-il asymptotiquement stable ?
2. Supposons que les couples d'entrée suivent la loi de commande

   $$u_i = -k_i\omega_i, \quad k_i > 0$$

   Montrer que l'origine du système en boucle fermée (système commandé) est globalement asymptotiquement stable.

Chapitre 5

Commande non linéaire par retour d'état

5.1 Introduction

Le retour d'état linéarisant est une technique qui transforme, partiellement ou totalement, le système non linéaire en un système linéaire.

Ceci est différent de la linéarisation autour d'un point de repos (linéarisé tangent) dans le sens ou le passage vers un système linéaire se fait par une transformation et un retour d'état exacts au lieu de l'approximation faites par la linéarisation tangente.

5.2 Exemple introductif

Nous allons d'abord présenter la technique de linéarisation entrée-sortie sur un exemple simple afin de montrer son principe. Par la suite, on la généralisera pour un système non linéaire monovariable affine en la commande.

Soit le modèle d'état décrivant le niveau d'eau d'un réservoir h

$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh} \tag{5.1}$$

u est l'entrée de commande ; il s'agit du débit d'eau entrant. $A(h)$ est une fonction no linéaire de h. On souhaite réguler le niveau d'eau à h_d. en choisissant $u = a\sqrt{2gh} + A(h)v$, avec v comme nouvelle entrée, le comportement du réservoir devient

$$\dot{h} = v \tag{5.2}$$

en choisissant encore

$$v = -\alpha\tilde{h}$$

avec $\tilde{h} = h(t) - h_d$ et α une constante réelle strictement positive, la dynamique de la boucle fermée s'écrit

$$\dot{h} + \alpha\tilde{h} = 0$$

ce qui implique que $\tilde{h}(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Finalement, l'expression de la commande est

$$u(t) = a\sqrt{2gh} - A(h)\alpha\tilde{h} \tag{5.3}$$

5.3 Algèbre différentielle

Définition 5.1 (Champ de vecteurs) *Un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une application f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{5.4}$$

Définition 5.2 (Fonction lisse) *La fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dites lisse si elle a des dérivées partielles continues pour n'importe quel ordre. Cette classe de fonctions est notées C^∞.*

Définition 5.3 (Difféomorphisme) *Une fonction $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, définie sur une région $\mathbf{\Omega}$, est un difféomorphisme si elle est lisse, et si son inverse $\mathbf{\Phi}^{-1}$ existe et qu'il est lisse.*

Définition 5.4 (Changement de variables) *Soit $\mathbf{\Phi}$ un difféomorphisme dans $\mathbf{\Omega}$. Un changement de coordonnées non linéaires s'écrit*

$$\boldsymbol{z} = \Phi(\boldsymbol{x}) \tag{5.5}$$

où

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\boldsymbol{x}) \\ \phi_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \phi_2(x_1, \cdots, x_n) \\ \\ \phi_n(x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix}$$

Définition 5.5 (Crochet de Lie) *Soit f et g deux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Le crochet de Lie *des deux champs de vecteurs f et g est un nouveau champ de vecteur noté $[f, g]$ et défini par :*

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \tag{5.6}$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ désignent respectivement les matrices Jacobienne de f et de g évaluées en x.

Remarque 5.1 *Pour simplifier leur notation, le crochet de Lie $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}]$ est également noté $ad_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{g}$:*

$$ad_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{g} \triangleq [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}] \tag{5.7}$$

Définition 5.6 (Dérivée de Lie) *La dérivée de Lie d'une fonction $\lambda(x)$dans la direction d'un champ de vecteurs $f(x)$, noté $L_f\lambda$ est définie par la relation suivante*

$$L_f\lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i} f_i(x) \tag{5.8}$$

Lorsque l'opération est répétée k fois, elle est noté

$$L_f^k\lambda(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1}\lambda)}{\partial x} f(x) \qquad \text{pour } k \geq 1$$

avec $L_f^0\lambda(x) = \lambda(x)$

Propriétés

$$L_gL_f\lambda(x) = \frac{\partial(L_f\lambda)}{\partial x}g(x)$$

$$L_{[f,g]} = L_f(L_g\lambda) - L_g(L_f\lambda)$$

Définition 5.7 (Distribution) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f_1, f_2, \ldots, f_d$ d champs de vecteurs définis sur U. Une distribution en un point x, noté $\Delta(x)$ est l'espace vectoriel engendré par ces champs de vecteurs.*

$$\Delta(x) = \{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$$

A chaque point x de U est associé un espace vectoriel. La distribution est involutive si $\forall\ f_1, f_2 \in \Delta(x)$ le nouveau champs de vecteur $[f_1, f_2] \in \Delta(x)$

Définition 5.8 (Champ de vecteur involutifs) *Un ensemble de champ de vecteurs linéarement indépendants $\{f_1, f_2, , f_m\}$ est dit involutif si et seulement si il existe une fonction scalaire $\alpha_{ijk}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que*

$$[\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ijk}(x)\boldsymbol{f}_k(x), \quad \forall i, j$$

Properties

- Un champ de vecteur constant est toujours involutif.
- Un ensemble composé d'un seul champ de vecteurs $\boldsymbol{f}$ est involutif.

5.4 Linéarisation entrée-sortie d'un système SISO

Soit le système non linéaire SISO

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.9}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$,u et y sont dans $\mathbb{R}$

5.4.1 Degré relatif

Définition 5.9 (Degré relatif) *Le degré relatif du système précédent, noté r, est le nombre de fois qu'on doit dériver la sortie y pour que la commande u apparaisse explicitement, il est défini par*

$$\begin{aligned} L_gL_f^{r-1}h(x) &\neq 0 \\ L_gL_f^kh(x) &= 0 \quad \textit{pour tout } k < r-1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Les dérivée de la sortie y sont données par

$$y = h(x)$$

première dérivée

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{h}(x) = \tfrac{\partial h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \\ \dot{y} &= L_f h(x) + L_g h(x)u\end{aligned}$$

si $L_g h(x) \neq 0$, alors le degré relatif est $r = 1$, sinon on continue de dériver

$$\begin{aligned}y^{(2)} &= \tfrac{\partial L_f h(x)}{\partial x}\dot{x} = \tfrac{\partial L_f h(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \\ y^{(2)} &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u\end{aligned}$$

si $L_g L_f h(x) \neq 0$, alors le degré relatif est $r = 2$, sinon on continue de dériver. A la fin

$$y^{(k)} = L_f^k h(x) \quad \text{pour tout } k < r$$

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u \quad \text{pour } k = r$$

r est nécessairement tel que $r \leq n$.

5.4.2 Linéarisation entrée-sortie

Soit le système non linéaire SISO affine en la commande

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \\ y = h(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{5.11}$$

On cherche un retour d'état non linéaire de la forme

$$u = \alpha(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x})v \tag{5.12}$$

qui amènerai le système non linéaire initial à un nouveau système avec une nouvelle entrée v. Ce nouveau système aura un comportement linéaire.

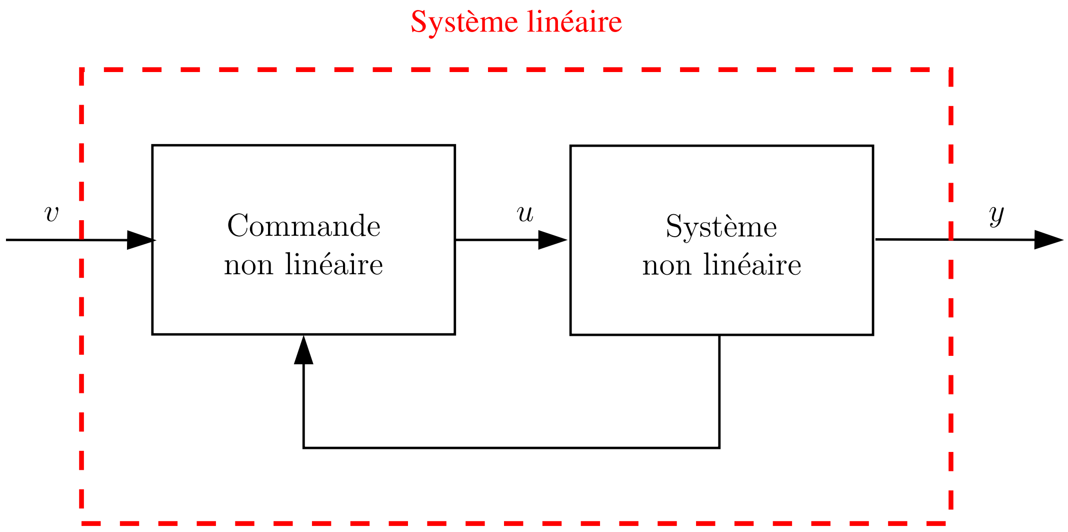


Figure 5.1 – Linéarisation entrée-sortie d'un système SISO.

Théorème 5.1 (Linéarisation entrée-sortie) *Soit le système (6.1) avec un degré relatif* r *en* $\boldsymbol{x^0}$*.*
le retour d'état non linéaire :

$$u = \alpha(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x})v \tag{5.13}$$

avec

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^r h(\boldsymbol{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x})} \qquad ; \qquad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x})} \tag{5.14}$$

transforme le comportement entrée-sortie du système non linéaire en un système linéaire qui est un intégrateur d'ordre r avec une nouvelle entrée v :

$$\overset{(r)}{y} = v \tag{5.15}$$

Il suffit de réécrire l'expression de $y^{(r)}$ si le degré relatif du système est r

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u \quad \text{pour } k = r$$

en posant $v = y^{(r)}$, On déduit l'expression de la commande

$$u = \left(L_f L_f^{r-1} h(x)\right)\left(v - L_f^r h(x)\right)$$

que l'on peut réécrire

$$u = \alpha(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x}) v \tag{5.16}$$

avec

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^r h(\boldsymbol{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x})} \qquad ; \qquad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\boldsymbol{x})} \tag{5.17}$$

Exemple 5.1 (Système non linéaire du second ordre) *Soit le système non linéaire du second ordre*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

en posant $h(x) = x_2$, on vérifie aisément que $L_g h(x) = 1$. Le système a donc un degré relatif de 1 par rapport à la sortie dans tous l'espace d'état $\mathbb{R}^2$. Les composante du retour d'état pour une linéarisation entrée-sortie sont donc

$$\alpha(x) = -\frac{L_f h(x)}{L_g h(x)} = x_1 x_2, \quad \beta(x) = 1$$

l'équation d'état du système en boucle fermée devient alors

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 + x_1 x_2 + v = v \end{aligned}$$

Exemple 5.2 (Autre exemple de réservoir) *Soit le modèle d'évolution du niveau d'eau d'un réservoir*

$$\rho A \frac{dh}{dt} = \rho v_B - k^* \sqrt{\rho g h}$$

où ρ est la densité du fluide, A la surface de la section du réservoir, h le niveau d'eau, v_b le débit volumique de fluide entrant, g la constante de gravitation et k^* la constante de la valve. En posant $x = h$ et $u = v_b$, on a l'équation d'état de l'évolution du réservoir

$$\frac{dx}{dt} = -k_2 \sqrt{x} + k_1 u$$

En choisissant $y = h(x) = x$, on déduit que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \tfrac{-L_f h(x)}{L_g h(x)} = \tfrac{k_2 \sqrt{x}}{k_1} \\ \beta(x) &= \tfrac{1}{L_g h(x)} = \tfrac{1}{k_1} \end{aligned}$$

Le système en boucle fermé s'écrit alors $\dot{x} = -k_2 \sqrt{x} + k_1 (\frac{k_2 \sqrt{x}}{k_1} + \frac{1}{k_1} v) = v$

Remarque 5.2 *to be complete ...*

5.5 Linéarisation entrée-état

5.5.1 Position du problème

Soit le système non linéaire mono-entrée

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Le problème de linéarisation entrée-état consiste à trouver (si ça existe) :

1. Un retour d'état non linéaire

$$u = \alpha(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x})v \tag{5.18}$$

2. Un changement de variables

$$\boldsymbol{z} = \Phi(\boldsymbol{x}) \tag{5.19}$$

tel que, le système résultant en boucle fermée

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})v \tag{5.20}$$

dans les nouvelles coordonnées $\boldsymbol{z} = \Phi(\boldsymbol{x})$ est *linéaire et commandable*, *i.e*,

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}v \tag{5.21}$$

avec $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ commandable.

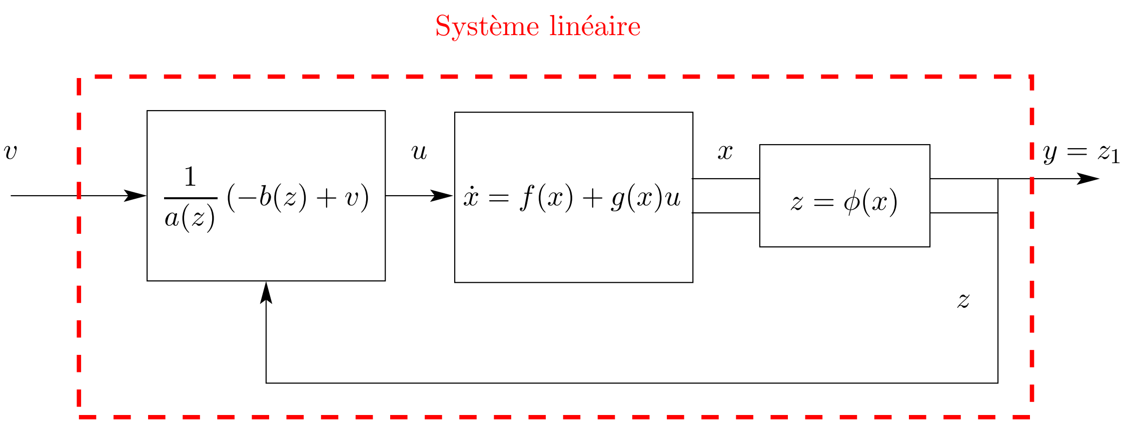


Figure 5.2 – Linéarisation entrée-état d'un système monovariable.

5.6 Synthèse de la commande linéarisante entrée-état

5.6.1 Cas où $r = n$

On commencera par le cas où le degrés relatif r de la sortie y est égal à la dimension n du vecteur d'état x.

Soit le système non linéaire mono-entrée

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

Posons

$$z_1 = y,\ z_2 = \dot{y},\ \cdots, z_n = y^{(n-1)}$$

ou encore

$$z_i = L_f^{i-1}h(x) = \phi_i(x); \quad i = 1, \cdot, n$$

il vient alors la forme

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_1 = z_3 \\ \cdots \\ \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \cdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = b(z) + a(z)u \end{cases}$$

avec

$$b(z) = b(\phi(z)) = L_f^n h(x)\big|_{x=\phi^{-1}(z)} \quad ; \quad a(z) = a(\phi(z)) = L_g L_f^{n-1} h(x)\big|_{x=\phi^{-1}(z)}$$

En prenant

$$u = \frac{1}{a(x)}\left(v - b(z)\right)$$

Le système initial devient

$$\begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_1 = z_3 \\ \cdots \\ \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \cdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = v \end{array}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 5.2 (Linéarisation entrée-état : Cas $\boldsymbol{r = n}$) *Soit le système* $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ *avec un degré relatif* $r = n$ *(exactement égal à la dimension du vecteur d'état).*
Le changement de variables

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{bmatrix} = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \cdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \cdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

où $z_i = \phi_i(\boldsymbol{x}) = \overset{(i-1)}{y} = L_f^{i-1} h(\boldsymbol{x})$
transforme le système original en un nouveau système avec z *comme nouveau vecteur d'état*

$$\begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_1 = z_3 \\ \cdots \\ \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \cdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = b(z) + a(z)u \end{array}$$

avec

$$b(z) = L_f^n h(x)\big|_{x=\phi^{-1}(z)} \quad ; \quad a(z) = L_g L_f^{n-1} h(x)\big|_{x=\phi^{-1}(z)}$$

Le retour d'état non linéaire :

$$u = \alpha(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x})v \tag{5.23}$$

avec

$$\alpha(x) = -\frac{b(\boldsymbol{z})}{a(\boldsymbol{z})} = -\frac{L_f^n h(\boldsymbol{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\boldsymbol{x})} \quad ; \quad \beta(x) = \frac{1}{a(\boldsymbol{z})} = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\boldsymbol{x})} \tag{5.24}$$

résulte dans les nouvelles coordonnées, en boucle fermée, en un système gouverné par des équations correspondants à système linéaire mis sous forme compagne de commandabilité.

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}v \tag{5.25}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 5.3 (Système d'ordre deux [15]) *Soit le système*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

en dérivant y, on obtient

$$\dot{y} = x_2, \; \ddot{y} = x_1 x_2 + u$$

d'où

$$u = v - x_1 x_2$$

soit

$$\alpha(x) = -x_1 x_2 \quad et \beta(x) = 1$$

le degré relatif est 2.

On pose

$$z_1 = y, \; z_2 = \dot{y},$$

La nouvelle représentation d'état est alors

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned}$$

qui est un système linéaire de la forme

$$\dot{z} = Az + Bv$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *La matrice de commandabilité de Kalman* (BAB) *est de rang 2. Le système est donc commandable.*

Du théorème précédent, on peut énoncer le Lemme suivant

Lemme 5.1 *Le problème de linéarisation entrée-état admet une solution si et seulement si il existe un voisinage U de $\boldsymbol{x}^0$ et une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}, \lambda$ définie dans U, tel que le système*

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \\ y=h(\boldsymbol{x})\end{array}\right. \tag{5.26}$$

à un degrés relatif n en $\boldsymbol{x}^0$, i.e.

$$\begin{array}{llll}\bullet & L_g\lambda(x) & = & L_gL_f\lambda(x)=\cdots=L_gL_f^{n-2}\lambda(x)=0 \\ \bullet & L_gL_f^{n-1}\lambda(x) & \neq & 0\end{array} \tag{5.27}$$

Ce Lemme dit simplement qu'il suffit de trouver une fonction qui simule une sortie pour laquelle le degré relatif r est égal à n.

Le théorème suivant donne des indications sur la façon de rechercher la fonction $\lambda(x)$ citée précédemment :

Théorème 5.3 (Linéarization exacte entré-état) *Le système $\dot{x}=f(x)+g(x)u$ est exactement linéarisable entrée-état, dans une région $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si,*

1. *Les vecteurs $\left\{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad ad_f\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\cdots \quad ad_f^{n-2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad ad_f^{n-1}\boldsymbol{g}()\right\}$ sont linéairement indépendants. i.e.*

$$rang\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x0}) \quad ad_f\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x0})\cdots \quad ad_f^{n-2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad ad_f^{n-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right]=n, \quad \forall x\in\Omega$$

2. *La distribution engendré par $\left\{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\ ad_f\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ ad_f^{n-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right\}$ est involutive sur Ω.*

5.6.2 Procédure de calcul de la commande linéarisante entrée-état

Étant donné un système non linéaire affine en la commande,

$$\dot{x}=f(x)+(x)u$$

On procède comme suit pour sa linéarisation entrée-état :

1. A partir de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, construire les champs de vecteurs

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\ ad_f\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ ad_f^{n-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

et vérifier les conditions d'indépendance linéaire et d'involutivité.

2. Si ces conditions sont satisfaites, résoudre e système d'équations aux dérivées partielles dont l'inconnue est $\lambda(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{array}{llll}\bullet & L_g\lambda(x) & = & L_gL_f\lambda(x)=\cdots=L_gL_f^{n-2}\lambda(x)=0 \\ \bullet & L_gL_f^{n-1}\lambda(x) & \neq & 0\end{array} \tag{5.28}$$

3. Calculer le retour d'état linéarisant $u=\alpha(\boldsymbol{x})+\beta(\boldsymbol{x})v$, où

$$\alpha(x)=-\frac{L_f^r\lambda(\boldsymbol{x})}{L_gL_f^{r-1}\lambda(\boldsymbol{x})} \quad ; \quad \beta(x)=\frac{1}{L_gL_f^{r-1}\lambda(\boldsymbol{x})} \tag{5.29}$$

4. Déduire le changement de variables

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \left(\lambda(\boldsymbol{x}), L_f\lambda(\boldsymbol{x}), \cdots, L_f^{n-1}\lambda(\boldsymbol{x})\right)^T \tag{5.30}$$

Remarque 5.3 *On montre que la résolution du système d'équations aux dérivée partielles*

$$\begin{array}{lllll} \bullet & L_g\lambda(x) & = & L_gL_f\lambda(x) = \cdots = L_gL_f^{n-2}\lambda(x) = 0 \\ \bullet & L_gL_f^{n-1}\lambda(x) & \neq & 0 \end{array} \tag{5.31}$$

est équivalente à la résolution du système suivant

$$\begin{array}{l} L_{ad_f^i g}\lambda(x) = 0; \quad i = 0, \ldots, n-2 \\ L_{ad_f^{n-1} g}\lambda(x) \neq 0 \end{array}$$

Exemple 5.4 (Linéarisation exacte ave r¡n) *Soit le système*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} u.$$

après calcul on a

$$ad_f^2 g = \begin{pmatrix} (1+x_2)(1+2x_2(1+x_1) - x_1x_3 \\ x_3(1-x_2) \\ -x_3(1+x_2)(1+2x_2) - 3x_1(1+x_1) \end{pmatrix}$$

5.6.3 Cas où $r < n$

Lorsque le degré relatif est inférieure à la dimension de l'espace d'état, le système est dit **partiellement linéarisable**. Avec $y = h(x) =$, considérons le changement de coordonnées $z_i = \phi_i(x)$ qui vérifie les deux relation suivantes :

$$z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1}h(x)$$

pour $1 \leq i \leq r$,
et

$$L_g\phi_i(x) = 0$$

pour $r + 1 \leq i \leq n$.
Le modèle d'état est alors réécrit comme suit dans les nouvelles coordonnées ϕ_i

$$\begin{array}{ll} \dot{z}_1 & = z_2 \\ \dot{z}_2 & = z_3 \\ & \\ \dot{z}_{r-1} & = z_r \\ \dot{z}_r & = b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})u \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} & = q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{array}$$

où

$$\boldsymbol{\xi} = [z_1, \cdots, z_r]^T \qquad , \quad \boldsymbol{\eta} = [z_{r+1}, \cdots, z_n]^T$$

$$a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_gL_f^{r-1}h(\phi^{-1}(\xi, \eta)) \quad , \quad b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_f^r h(\phi^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))$$

Le système se décompose en deux sous systèmes :

1. Un système linéaire de dimension r agissant sur le comportement entrée-sortie.
2. Un autre système non linéaire de dimension $n - r$ dont le comportement n'influe pas la sortie.

5.7 Dynamique des zéros

La dynamique des zéros d'un système non linéaire est définie comme étant la dynamique interne du système quand las sortie est mise à zéro par l'entrée.

Définition 5.10 (Dynamique des zéros) *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \\ y = h(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{5.32}$$

sous la contrainte $y = 0$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \\ 0 = h(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{5.33}$$

Ce système est appelé "dynamique contrainte à sortie nulle", ou brièvement dynamique des zéros.

Problème de mise à zéro de la sortie

Ce problème revient trouver, si elle existe, une paire composée de :
— Un état initial x^*
— une entrée de commande $u(t)$ définie au voisinage de $t = 0$
tel que la sortie correspondant $y(t)$ est identiquement nulle t dans un voisinage de $t = 0$.

5.7.1 Procédure d'annulation de la sortie

Pour annuler la sortie du système

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \\ y = h(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{5.34}$$

On procède par les étapes suivantes :

1. Choisir l'état initial du système tel que $\boldsymbol{\xi}(0) = 0$
2. Choisir $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0$ arbitrairement.
3. Utiliser la commande suivante

$$u = -\frac{b(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})}{a(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta})} \tag{5.35}$$

   où $\boldsymbol{\eta}(t)$ est solution de

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = q(\mathbf{0}, \boldsymbol{\eta}(t)) \tag{5.36}$$

   avec la condition initiale $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0$.

Remarque 5.4 *La stabilisation d'une sortie avec une dynamique des zéros globalement asymptotiquement stable implique la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée.*

5.8 Exercices

Exercice 5.1

Soit le système décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3 \\
&\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3 \\
&\dot{x}_3 = x_1^2 + u \\
&y = x_1
\end{aligned}$$

1. Calculer le degré relatif de la sortie.
2. Calculer une commande linéarisante entrée-sortie.

Exercice 5.2

Soit le système non linéaire MIMO décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_4 \\ x_3(1-x_4) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & x_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

1. Dériver y_1 et y_2 jusqu'à apparition de l'une des deux commandes u_1 ou u_2.
2. Écrire alors le système sous la forme

$$\begin{pmatrix} \overset{(r_1)}{y_1} \\ \overset{(r_2)}{y_2} \end{pmatrix} = \Delta(x). \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \Delta_0(x)$$

   en précisant $\Delta(x)$ et $\Delta_0(x)$.
3. Montrer alors qu'ils existe, dans un domaine de $D \subseteq \mathbb{R}^2$ une commande non linéaire par retour d'état

$$u = \alpha(x) + \beta(x).v$$

   qui permet de linéariser le système entrée-sortie. Déterminer $\alpha(x), \beta(x)$ et D.

Exercice 5.3

Soit le système non linéaire décrit par la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 \cos x_1 + u \cos(2x_1) \end{array} \right.$$

1. Montrer que le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= ax_2 + \sin x_1 \end{aligned}$$

   avec $y = z_1$ permet de ramener le système à un degrés relatif égal à deux.

2. Calculer la commande linéarisante entrée-état u et écrire l'équation d'état du système linéarisé.
3. Calculer une commande par placement de pole pour le système linéarisé afin de placer les deux pôles en boucle fermée en -2.
4. Déduire l'expression finale de la commande en fonction de x_1 et x_2.

Exercice 5.4

Considérons un arbre flexible entraîné par un moteur représenté sur la figure 5.3

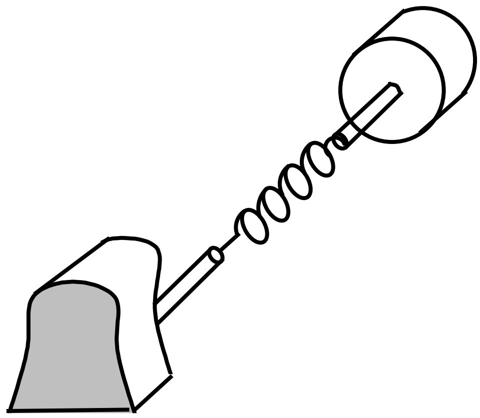


Figure 5.3 – Schéma d'un serre-joints

Son évolution est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) & = & 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) & = & u \end{cases}$$

1. Mettre le système sous forme d'état non linéaire $\dot{x} = f(x) + g(x)u$. Déterminer x, $f(x)$ et $g(x)$.
2. Vérifier la condition de commandabilité et d'involutivité.
3. Trouver un changement de variables $z = \Phi(x)$ et une commande non linéaire $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ qui réalise une linéarisation entrée-état.

Chapitre 6

Commande par modes glissants

6.1 Principe

Le principe de la commande par ***modes glissants*** est de contraindre les trajectoires du système commandé à atteindre une surface donnée (***La surface de glissement***) pour ensuite y rester [21].
La synthèse d'une loi de commande par modes glissants se fait ainsi en deux étapes :

— Détermination de la surface de glissement en fonction des objectifs de la commande et des propriétés statiques et dynamiques désirées pour le système bouclé.

— Synthèse d'une loi de commande discontinue de manière à forcer les trajectoires d'état du système à atteindre puis à rester sur cette surface malgré la présence d'incertitudes, de variations des paramètres du système, ...

6.2 Surface de glissement

Soit le système non linéaire affine en la commande

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) + g(x,t)u(x,t) \\ y(t) = h(x,t) \end{cases} \tag{6.1}$$

où

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état,	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ un champ de vecteurs lisse
$u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée,	$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times m}$ un champ de vecteurs lisse
$y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie,	$h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p\times n}$ un champ de vecteurs lisse

Définition 6.1 (variable de glissement) *Soit $s(x,t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction suffisamment differentiable telle que son annulation permette de satisfaire les objectifs de la commande. La fonction $s(x,t)$ est appelée **variable de glissement** ou de commutation.*

Cette variable est vue comme une sortie fictive du système qui rend compte des performances de la commande. Elle est en général définie comme un *ensemble de relations statiques (algébriques)* entre les variables d'état du système.

Définition 6.2 (Surface de glissement) *Le sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ défini par*

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | s(x,t) = 0\} \tag{6.2}$$

*est appelé **surface de glissement** ou contrainte de commutation.*

Remarque

1. Par abus de langage, on appel souvent surface de glissement la fonction $s(x, t)$ au lieu de l'ensemble $\mathcal{S}$.
2. La surface $s(x, t) = 0$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $(n - m)$. Elle est définie par le système d'équations algébriques :
$$s(x, t) = [s_1(x, t), \cdots, s_m(x, t)]^T = 0 \tag{6.3}$$
C'est l'intersection des m sous-variété $s_i(x, y)$ de dimension $(n - 1)$.
3. Une ***surface de glissement linéaire*** est définie par l'équation suivante [3]
$$s(x, t) = S \cdot x = 0 \tag{6.4}$$
où S est une matrice de dimensions $m \times n$ ($S \in \mathbb{R}^{m\times n}$).

6.3 Régime glissant

Le comportement d'un système commandé par modes glissant peut être décrit par deux phases (régimes)

Phase de convergence Cette phase correspond à l'intervalle de temps $t \in [0, t_s]$ pendant laquelle es trajectoires d'état du système ne sont pas dans l'ensemble de glissement $\mathcal{S}$. Durant cette phase, le système reste sensible aux variations de paramètres.

Phase de glissement Cette phase correspond à l'intervalle de temps $t \in [t_s, \infty]$ durant laquelle les trajectoires d'état sont dans l'ensemble de glissement $\mathcal{S}$.

Définition 6.3 (Régime glissant idéal) *On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur $\mathcal{S}$ s'il existe un temps fini t_s tel que la solution de (6.1) satisfait $s(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_s$.*

Définition 6.4 (Conditions d'invariance) *Les conditions d'invariance sont celles que doivent vérifier les trajectoire du système* ***en régime de glissement****. Elles sont données par :*
$$\boxed{s(x, t) = 0 \qquad ; \qquad \dot{s}(x, t) = 0 \qquad t \geq t_s} \tag{6.5}$$

Théorème 6.1 (Condition d'attractivité) *Soit la pseudo fonction de Lyapunov*
$$V(s) = \frac{1}{2} s^T \cdot s \tag{6.6}$$
Une condition ***nécessaire et suffisante*** *pour que la variable de glissement $s(x, t)$ tende vers zéro est que la dérivée temporelle de $V(.)$ soit définie négative.*
$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} s(x, t) = 0 \Leftrightarrow \dot{V} = s^T \cdot \dot{s} < 0} \tag{6.7}$$

Théorème 6.2 (Condition de $\boldsymbol{\eta}$-attractivité) *Pour assurer la convergence de $s(x, t)$ vers 0 en temps fini, la condition d'attractivité non-linéaire dite condition de η**-attractivité** doit être respectée*
$$\boxed{\lim_{t\to t_s} s(x, t) = 0 \Leftrightarrow \dot{V} = s^T \cdot \dot{s} < -\eta \cdot |s| \,, \quad \eta > 0} \tag{6.8}$$

Remarque 6.1 *La η-attractivité est une condition plus forte que l'attractivité.*

6.4 Calcul de la commande : Approche commande équivalente

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ étant supposées inconnues, on dispose de leurs estimés $\hat{f}(x)$ et $\hat{g}(x)$ tel que

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \hat{f}(x) + \Delta f(x) \\ g(x) & = & \hat{g}(x) + \Delta g(x) \end{array} \tag{6.9}$$

On suppose alors que la commande est la somme de deux termes

$$u = u_{eq} + u_n \tag{6.10}$$

— **Le terme de la *commande équivalente*** u_{eq} : Permet avec la commande discontinue u_n de ramener le système sur la surface de glissement.
Une fois sur la surface de glissement ;, Elle agit seule ($u_n = 0$) et permet de maintenir le système en régime de glissement.

— **Le terme de la *commande discontinue*** u_n : Permet de palier les incertitudes sur le modèle du système et de ramener, avec la commande équivalente, les trajectoires du systèmes sur la surface de glissement.

6.4.1 Calcul de la commande équivalente u_{eq}

On suppose que le système est certain i.e : $\Delta f(x) = 0$ et $\Delta g(x) = 0$. Il sera donc décrit par l'équation (6.1).
On suppose que le système est sur la surface de glissement :

$$\exists t_s \in \mathbb{R}^+ : s(x, t_s) = 0 \text{ et } s(x,t) = 0, \forall t > t_s$$

La commande discontinue est alors nulle $u_n = 0$. On cherche donc $u = u_{eq}$ qui doit vérifier les *conditions d'invariance* (6.5)

$$s(x) = 0 \qquad ; \qquad \dot{s}(x) = 0$$

On a donc

$$\dot{s}(x,t) = \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \tag{6.11}$$

soit en substituant l'expression de $\dot{x}$ donnée par (6.1) :

$$\dot{s}(x,t) = a(x,t) + b(x,t)u_{eq}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(x,t) & = & \dfrac{\partial s}{\partial x} f(x,t) + \dfrac{\partial s}{\partial t} \\ b(x,t) & = & \dfrac{\partial s}{\partial x} g(x,t) \end{array} \right.$$

On tire finalement :

$$\boxed{u_{eq} = -\left[\frac{\partial s}{\partial x} \cdot g(x)\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial s}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{\partial s}{\partial t}\right]} \tag{6.12}$$

La commande équivalente u_{eq} maintient le système en régime de glissement (conditions d'invariance).

6.4.2 Calcul de la commande discontinue u_n

On suppose maintenant que le système est en phase de convergence.
En substituant la commande $u = u_{eq} + u_n$ dans l'expression (6.1) avec u_{eq} donnée par (6.12), on aboutit à la relation suivante :

$$\dot{s}(x,t) = \left[\frac{\partial s}{\partial x} \cdot g(x)\right] \cdot u_n \tag{6.13}$$

La commande discontinue u_n quand à elle doit assurer la condition d'attractivité durant *la phase de convergence* soit

$$\boxed{s^T \cdot \dot{s} < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} s_i \cdot \dot{s}_i < 0} \tag{6.14}$$

avec $s(x, t_s) = 0$.
en posant

$$\boxed{u'_n = \left[\tfrac{\partial s}{\partial x} \cdot g(x)\right] \cdot u_n \Leftrightarrow u_n = \left[\tfrac{\partial s}{\partial x} \cdot g(x)\right]^{-1} \cdot u'_n} \tag{6.15}$$

on a

$$\dot{s} = u'_n$$

La condition d'attractivité (6.14) s'écrit

$$s^T \cdot u'_n < 0 \tag{6.16}$$

ce qui donne

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} s_i(x) \cdot u'_{n_i} < 0} \tag{6.17}$$

Cete inégalité peut être vérifiée de plusieurs façons donnant lieu a différentes variantes du calcul de u'_n (donc de u_n) :

1. **Relais à gains constants :**

$$u'_{n_i} = \begin{cases} -\alpha_i \cdot sgn(s_i(x)), & s_i(x) \neq 0, \quad \alpha_i > 0 \\ 0 & s_i(x) = 0, \end{cases} \tag{6.18}$$

La commande u_n s'écrit finalement

$$u_n = -K \cdot sgn(s) \tag{6.19}$$

avec

$$K = diag(k_1, \cdots, k_m) = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \cdot \left[\frac{\partial s}{\partial x} \cdot g(x)\right]^{-1} \tag{6.20}$$

2. **Relais à gains dépendant de l'état :**

$$u'_{n_i} = \begin{cases} -\alpha_i \cdot sgn(s_i(x)), & s_i(x) \neq 0, \quad \alpha_i(x) > 0 \\ 0 & s_i(x) = 0, \end{cases} \tag{6.21}$$

La différence dans ce cas est que le gain $\alpha_i(x)$ dépend de l'état et doit donc vérifier

$$s_i \cdot \dot{s}_i = \alpha_i(x) \cdot s_i(x) \cdot sgn(s_i(x)) < 0 \tag{6.22}$$

exemple : $\alpha_i(x) = \beta_i(s_i^{2l}(x) + \gamma_i)$ avec $\beta_i > 0, \gamma_i > 0$ et $l \in \mathbb{N}$

3. **Feedback linéaire avec gains commutés :**

$$u'_{n_i} = \psi \cdot x; \qquad \psi = [\psi_{i,j}]_{\substack{i=1,m \\ j=1,m}} \tag{6.23}$$

Les gains de la matrice

$$s_i(x) \cdot (\psi_{i,1}x_1 + \cdots + \psi_{i,n}x_n) < 0$$

Les gains de la matrice ψ doivent vérifier

4. **Feedback linéaire continu :**

$$u'_{n_i}(x) = -\alpha_i s_i(x) \;\; \alpha_i > 0 \tag{6.24}$$

sous forme matricielle

$$u'_n(x) = -L \cdot s(x) \tag{6.25}$$

avec $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ une matrice définie positive constante.

5. **Vecteur unitaire non-linéaire avec facteur d'échelle :**

$$u'_n(x) = -\frac{s(x)}{\|s(x)\|} \cdot \rho, \qquad \rho > 0 \tag{6.26}$$

$$s^T(x) \cdot \dot{s}(x) = -\|s(x)\| \cdot \rho < 0, \qquad s(x) \neq 0 \tag{6.27}$$

6.5 Calcul de la commande : Approche Slotine [1]

L'objectif de cette approche est de réaliser une poursuite robuste de trajectoire x_d dans l'espace d'état.

6.5.1 Surface de glissement

Dans cette approche, la surface de glissement $s(x)$ est définie en fonction de l'ordre du système.
Soit le système non-linéaire affine en la commande défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ & \vdots & \\ \dot{x}_n & = & f(x,t) + g(x,t)u \\ y & = & x_1 \end{array}\right. \iff \overset{(n)}{x}_1 = f(x) + b(x)u \tag{6.28}$$

En posant $x = x_1$,on définit l'erreur de poursuite $\tilde{x} = x - x_d$

$$\tilde{x} = x - x_d = \left[\begin{array}{cccc} \tilde{x} & \dot{\tilde{x}} & \dots & \overset{(n-1)}{\tilde{x}} \end{array}\right]^T \tag{6.29}$$

On définit la surface de glissement comme suit :

$$\boxed{s(x,t) = \left(\tfrac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x}} \tag{6.30}$$

Le coefficient λ est choisis strictement positif.

6.6 Synthèse de la surface de glissement

6.6.1 Surface de glissement linéaire

La surface de glissement linéaire est donnée par l'équation

$$s(x,t) = S \cdot x + r(t) = 0, \qquad S \in \mathbb{R}^{m\times n};\ r(t) \in \mathbb{R}^m. \tag{6.31}$$

$r(t)$ représente le signal de référence. Les étapes de la synthèse d'une surface de glissement linéaire pour le système (6.1) sont les suivantes :

Mettre le système sous la forme canonique de Luenberger Après une transformation d'état linéaire ou non linéaire $x \longrightarrow z$ (voir Annexe 6.8), la forme régulière du système (6.1) est alors

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \hat{f}_1(z,t) \\ \dot{z}_2 &= \hat{f}_2(z,t) + \hat{g}_2(z,t)u(z,t) \end{aligned} \tag{6.32}$$

avec $z_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_2 \in \mathbb{R}^m$ et $g_2(z) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}$

Déduire z_2 en fonction de z_1 L'équation de la surface de glissement s'écrit alors

$$s(z,t) = \begin{bmatrix} \hat{S}_1 & \hat{S}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + r(t) = 0 \tag{6.33}$$

Si S_2 n'est pas singulière, on peut déduire x_2 en fonction de x_1

$$z_2(t) = -\hat{S}_2^{-1}\hat{S}_1 z_1(t) - \hat{S}_2^{-1} r(t) \tag{6.34}$$

Déduire la dynamique d'ordre réduit En substituant z_2 dans (6.32), on déduit la dynamique d'ordre réduit ($(n-m)$ variables)

$$\boxed{\dot{z}_1 = \hat{f}_1(z_1, z_2, t) = f_1(z_1, -\hat{S}_2^{-1}\hat{S}_1 z_1 - \hat{S}_2^{-1} r(t))} \tag{6.35}$$

Dans les cas où $\hat{f}_1$ a une forme linéaire

$$\dot{z}_1 = \hat{f}_1(z_1, z_2, t) = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 \tag{6.36}$$

La dynamique réduite devient

$$\boxed{\dot{z}_1 = \left[A_{11} - A_{12}\hat{S}_2^{-1}\hat{S}_1\right] \cdot z_1 - A_{12}\hat{S}_2^{-1} r(t)} \tag{6.37}$$

dont la matrice d'état est de la forme $A_{11} + A_{12}F$ avec $F = -{S_2}^{-1}S_1$.
Si la paire (A_{11}, A_{12}) est *commandable*, on peut utiliser les même techniques de la commande LQR et de placement de poles pour choisir la matrice F puis déduire les matrices S_1 et S_2 tel que $F = {S_2}^{-1}S_1$.

6.6.2 Surface de glissement non linéaire

Dans le cas d'une surface de glissement non linéaire, on considère la surface de glissement suivante :

$$s(x) = s_1(x_1) + S_2 x_2 + r(t) = 0 \tag{6.38}$$

qui est linéaire en x_2 et peut être non linéaire en x_1.La dynamique d'ordre réduit en mode glissant est donnée par

$$\boxed{\dot{z}_1 = \hat{f}_1(z_1, -\hat{S}_2^{-1} \cdot \hat{s}_1(z_1) - \hat{S}_2^{-1} r(t), t)} \tag{6.39}$$

6.7 Robustesse en Présence de Perturbations et Incertitudes Paramètriques [2]

Afin de tenir compte des incertitudes paramètriques et des perturbations externes, le modèle (6.1) du système est réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} = \;& [f(x,t) + \Delta f(x,t,q(t))] \\ & + [g(x,t) + \Delta g(x,t,q(t))]\, u(x,t) + d(t) \end{aligned} \tag{6.40}$$

6.7.1 Hypothèse de Correspondance (Matching Condition)

Nous allons faire deux hypothèses :

Hypothèse 1 : Appelée *condition de correspondance (Matching Condition)*. Elle dit que les incertitudes et les perturbations externes $\Delta f, \Delta g$ et $d(t)$ peuvent toutes êtres regroupées dans une seule fonction $\xi(x,t,q,d,u)$ tel que

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u(x,t) + g(x,t)\xi(x,t,q,d,u) \tag{6.41}$$

Hypothèse 2 : Il existe une fonction réelle positive bornée $\rho(x,t)$ tel que :

$$\|\xi(x,t,q,d,u)\| \leq \rho(x,t) \tag{6.42}$$

On montre [2] que la condition (6.42) est vérifiée si

$$u_n(x,t) = \begin{cases} -\frac{g^T\left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]S}{\left\|g^T\left[\frac{\partial S}{\partial x}\right]S\right\|}\,[\rho(x,t) + \alpha(x,t)] & si\ S(x,t) \neq 0 \\ 0, sinon & \end{cases} \tag{6.43}$$

6.8 Forme canonique [3]

6.8.1 Surface linéaire, transformation linéaire

On suppose qu'il exist une transformation linéaire non singulière

$$z(t) = T \cdot x(t) \tag{6.44}$$

qui satisfait la relation suivante

$$T \cdot g(x,t) = T \cdot g(T^{-1}z, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{g}_2(z,t) \end{bmatrix}, \quad T \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \hat{g}_2(z,t) \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{6.45}$$

La système s'écrira

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \hat{f}_1(z,t) \\ \dot{z}_2(t) &= \hat{f}_2(z,t) + \hat{g}_2(z,t)u(z,t) \end{aligned} \tag{6.46}$$

avec

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T \cdot x \quad ; \qquad \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{bmatrix} = T \cdot f$$

La surface de glissement s'écrit également

$$\boxed{s(z,t) = \begin{bmatrix} \hat{S}_1 & \hat{S}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + r(t) = 0} \tag{6.47}$$

avec $\left[\hat{S}_1 \ \hat{S}_2\right] = [S_1 \ S_2] \cdot T^{-1}$.
Si le système (6.1) est linéaire, sa forme régulière est donnée par

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}} \tag{6.48}$$

6.8.2 Surface linéaire, transformation non-linéaire

Si une transformation linéaire non singulière satisfaisant la condition (6.45) n'existe pas , on recherchera une transformation non-linéaire de la forme

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix} \tag{6.49}$$

$T(x)$ doit satisfaire :

1. $T(x,t)$ est un difféomorphisme. i.e :
   $\exists\ \bar{T} : \bar{T}(z,t) = x$ satisfaisant $\bar{T}(0,t) = 0$ pour tout t.
2. $T_1(\cdot,\cdot)\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ et $T_2(\cdot,\cdot)\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ \longrightarrow \mathbb{R}^m$
3. $T(z,t)$ doit satisfaire :

$$\frac{\partial T}{\partial x} g(x,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} \end{bmatrix} g(\bar{T}(z,t),t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{g}_2(z,t) \end{bmatrix}$$

Après simplifications, la dynamique du système devient

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial T_1}{\partial x} f(\bar{T}(z)) && \triangleq \hat{f}_1(z) \\ \dot{z}_2 &= \frac{\partial T_2}{\partial x} f(\bar{T}(z)) + \frac{\partial T_2}{\partial x} g(\bar{T}(z))u && \triangleq \hat{f}_2(z) + \hat{g}_2(z)u \end{aligned} \tag{6.50}$$

6.9 Exercices

Exercice 6.1

Pour chacun des systèmes suivants, en choisissant $\sigma = x_1$ comme variable de glissement et $u = -\text{sign}(\sigma)$, trouver l'équation de glissement en utilisant la méthode de la commande équivalente puis la méthode de Filippov

$$(a) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & u \\ \dot{x}_2 & = & (2u^2 - 1)x_2 \end{array} \right.$$

$$(b) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & u \\ \dot{x}_2 & = & (u - 2u^3)x_2 \end{array} \right.$$

$$(c) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & u \\ \dot{x}_2 & = & (u - 2u^2)x_2 \end{array} \right.$$

Exercice 6.2

Soit le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ \sigma & = & Gx \end{array} \right.$$

avec σ la variable de glissement.

Trouver la commande équivalente et les équations du régime de glissement pour les cas suivants :

1.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 19 \\ 3 & 29 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \; G = \begin{bmatrix} 9 & 12 \end{bmatrix},$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \; G = \begin{bmatrix} 1 & 29 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \end{bmatrix},$$

Exercice 6.3

Soit le système non linéaire du second ordre

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + ax_1 \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = bx_1x_2 + u \end{array}$$

avec a et bb deux constantes inconnues mais bornées :

$$|a - 1| \leq 1 \qquad ; \qquad |b - 1| \leq 2$$

1. Choisir une fonction candidate de Lyapunov qui permet de stabiliser globalement x_1 en utilisant x_2 comme commande.
2. Choisir une surface de glissement et proposer une commande continue par mode glissants qui permet de stabiliser globalement le système par un retour d'état.

Deuxième partie

Solutions des exercices

Corrigé exercices chapitre n° 1

Généralités sur le systèmes non linéaires

Corrigé Exercice 1.1

Système	Non linéaire	Stationnaire	Dynamique	Multivariable
(a)		**X**	**X**	
(b)			**X**	
(c)		**X**		
(d)	**X**	**X**	**X**	
(e)			**X**	
(f)	**X**	**X**	**X**	
(g)		**X**	**X**	
(h)			**X**	
(i)	**X**	**X**	**X**	
(j)	**X**	**X**	**X**	
(k)	**X**		**X**	

Table 1.1 – Classification des systèmes

Corrigé Exercice 1.2

On suppose qu'on impose L entrées $u_1, u_2, \ldots, u_L$ au système. Ses réponses sont respectivement $y_1, y_2, \ldots, y_L$ (Figure 1.1)

Pour montrer que la sortie du système à l'entrée $\mathcal{U} = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k u_k$ est $\mathcal{Y} = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k y_k$, il suffit de vérifier que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient l'équation différentielle dy système.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{(i)}{y} = \sum_{j=0}^{m} b_j \overset{(j)}{u}$$

On ne fait pas apparaître le temps dans les expressions des coefficients et des signaux pour alléger l'écriture (a_i au lieu de $a_i(t)$ par exemple). Comme les couples (u_k, y_k) vérifient

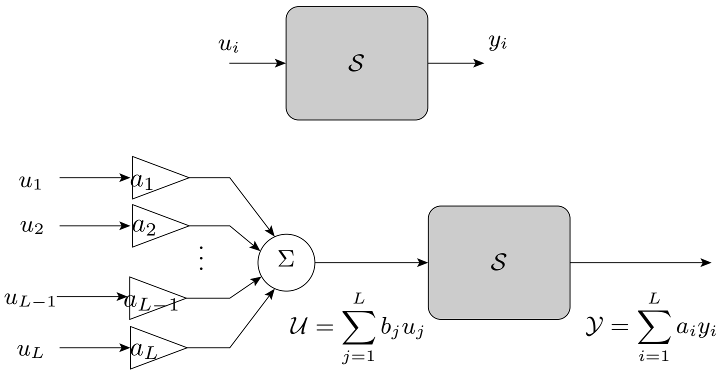


Figure 1.1 – Principe de superposition.

l'équation différentielle du système alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{(i)}{y_1} &= \sum_{j=0}^{m} b_j \overset{(j)}{u_1} \\
\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{(i)}{y_2} &= \sum_{j=0}^{m} b_j \overset{(j)}{u_2} \\
\vdots &= \vdots \\
\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{(i)}{y_k} &= \sum_{j=0}^{m} b_j \overset{(j)}{u_k} \\
\vdots &= \vdots \\
\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{(i)}{y_L} &= \sum_{j=0}^{m} b_j \overset{(j)}{u_L}
\end{aligned}
$$

on multiplie les équations précédentes par les α_k et somme terme à terme, on obtient alor

$$
\sum_{k=1}^{L} \sum_{i=0}^{n} \alpha_k a_i \overset{(i)}{y_k} = \sum_{k=1}^{L} \sum_{j=0}^{m} \alpha_k b_j \overset{(j)}{u_k}
$$

on permute l'ordre de sommation

$$
\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{L} \alpha_k a_i \overset{(i)}{y_k} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{L} \alpha_k b_j \overset{(j)}{u_k}
$$

on sort les termes a_i et b_j car ils sont indépendants de k

$$
\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=1}^{L} \alpha_k \overset{(i)}{y_k} = \sum_{j=0}^{m} b_j \sum_{k=1}^{L} \alpha_k \overset{(j)}{u_k}
$$

on regroupe la dérivation (opérateur linéaire) pour faire apparaître $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Y}$

$$
\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{(i)}{\left(\sum_{k=1}^{L} \alpha_k y_k \right)} = \sum_{j=0}^{m} b_i \overset{(j)}{\left(\sum_{k=1}^{L} \alpha_k y_k \right)}
$$

on remplace $\mathcal{U} = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k u_k$ et $\mathcal{Y} = \sum_{k=1}^{L} \alpha_k y_k$ on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{(i)}{\mathcal{Y}} = \sum_{j=0}^{m} b_j \overset{(j)}{\mathcal{U}}$$

par conséquent $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Y}$ vérifient l'équation différentielle du système, ce qui prouve qu'il vérifie le principe de superposition.

Corrigé Exercice 1.3

L'équation différentielle du système est

$$\overset{(n)}{y} = g(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{(n-1)}{y}, u)$$

On définit nos variables d'état de façon recursive

$$\begin{aligned}
x_1 &= y \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\
x_2 &= \dot{y} \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\
x_3 &= \ddot{y} \Rightarrow \dot{x}_3 = \overset{(3)}{y} = x_4 \\
\vdots &= \vdots \\
x_i &= \overset{(i-1)}{y} \Rightarrow \dot{x}_i = \overset{(i)}{y} = x_{i+1} \\
\vdots &= \vdots \\
x_{n-1} &= \overset{(n-2)}{y} \Rightarrow \dot{x}_{n-1} = \overset{((n-1)}{y} = x_n \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} \Rightarrow \dot{x}_n = \overset{(n)}{y} = g(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{(n-1)}{y}, u)(\text{d'après la représentation d'état})
\end{aligned}$$

soit finalement pour la dernière équation

$$\dot{x}_n = g(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{(n-1)}{y}, u)$$

La représentation d'état du système est alors

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\vdots &= \vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= g(t, x_1, x_2, \ldots, u)
\end{aligned}$$

et le vecteur d'état est

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y} \end{bmatrix}$$

Corrigé Exercice 1.4

L'équation du système est

$$\overset{(n)}{y} = g_1(t, y, \dot{y}, \cdots, \overset{(n-1)}{y}, u) + g_2(t, y, \dot{y}, \cdots, \overset{(n-2)}{y})\dot{u}$$

de même que pour l'exercice précédent, on choisit

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ x_2 & = & \dot{y} \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ x_{n-1} & = & \overset{(n-2)}{y} \Rightarrow \dot{x}_{n-1} = \overset{((n-1)}{y} \end{array}$$

en posant

$$x_n = \overset{(n-1)}{y} - g_2(t, y, \dot{y}, \cdots, \overset{(n-2)}{y})\dot{u}$$

le but de ce choix est de faire apparaître un terme $-g_2(-)\dot{u}$ pour le simplifier avec $g_2(-)\dot{u}$ qui apparaît dans $\overset{(n)}{y}$ lors du calcul de $\dot{x}_n$. On a

$$\dot{x}_n = \overset{(n)}{y} - \frac{d}{dt}\left(g_2(-)\right) u - g_2(-)\dot{u}$$

en remplaçant $\overset{(n)}{y}$ par son expression donnée par la représentation d'état on obtient

$$\dot{x}_n = g_1(-) + g_2\left(-\right)\dot{u} - \frac{d}{dt}\left(g_2(-)\right) u - g_2(-)\dot{u}$$

on a alors

$$\dot{x}_n = g_1(-) - \frac{d}{dt}\left(g_2(-)\right) u$$

on revient maintenant à x_{n-}

$$\dot{x}_{n-1} = \overset{(n-1)}{y} = x_n + g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})u$$

on peut alors remplacer $\overset{(n-1)}{y}$ dans l'expression de $\dot{x}_n$

$$\dot{x}_n = g_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, \underbrace{x_n + g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})u}_{\overset{(n-1)}{y}}, u - \frac{d}{dt}\left(g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\right) u\right)$$

avec

$$\frac{d}{dt}\left(g_2(-)\right) = \frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial g_2}{\partial x_{n-1}}\dot{x}_{n-1}$$

qui peut s'exprimer en fonction des $x_i, i = 1, n$.

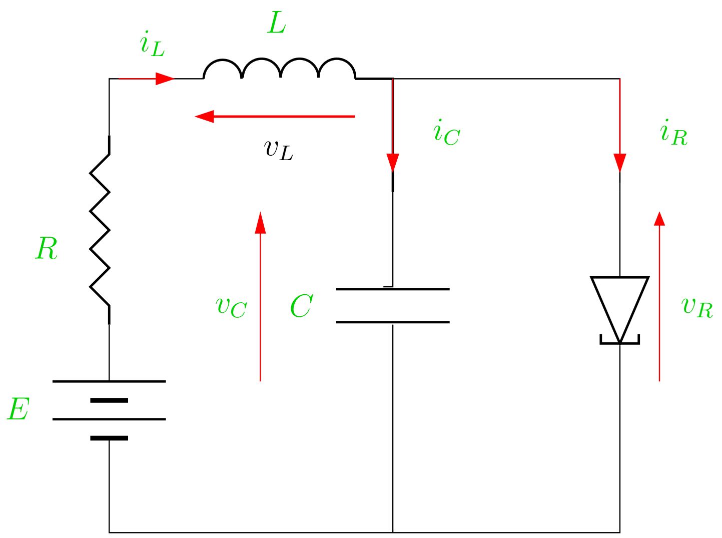


Figure 1.2 – Circuit à diode tunnel.

Corrigé Exercice 1.5

1. Comme le montre la figure 1.2, l'application des lois de Krichoff permet d'écrire

$$\begin{array}{rcll} i_L & = & i_C + i_R & \text{(Loi des noeuds)} \\ -E + Ri_L + v_L + v_C & = & 0 & \text{(Loi des mailles)} \\ v_C & = & v_R & \end{array}$$

   Les tensions aux bornes de la diode tunnel, condensateur et de la bobine sont données par

$$\begin{array}{rcl} i_R & = & h(v_R) \\ v_C & = & \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t ic(\tau)d\tau \\ v_L & = & L\dfrac{di_L}{dt} \end{array}$$

2. On choisit les variables d'état et l'entrée suivantes

$$\begin{cases} x_1 & = & v_C \\ x_2 & = & i_L \\ u & = E & \end{cases}$$

   on calcule la dérivée temporelle de x_1

$$x_1 = v_c = \frac{1}{C}\int_0^t ic(\tau)d\tau \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_c$$

   on remplace $i_C = i_L - i_R$, on obtient

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}(i_L - i_R) = \frac{1}{C}(i_L - h(v_R))$$

soit

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}(x_2 - h(x_1))$$

pour x_2

$$\dot{x}_2 = \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{L}v_L$$

d'autre part

$$v_L = -Ri_L - v_C + E$$

on tire alors

$$\dot{x}_2 = \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L - \frac{v_C}{L} + \frac{E}{L}$$

en substituant les variables d'état et l'entrée on obtient

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u)$$

La représentation d'état du système est finalement

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \frac{1}{C}(x_2 - h(x_1)) \\ \dot{x}_2 & = & \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u) \end{array}$$

3. Les points de repos vérifient

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & 0 \Rightarrow x_2 - h(x_1) = 0 \\ \dot{x}_2 & = & 0 \Rightarrow -x_1 - Rx_2 + u = 0 \end{array}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & h(x_1) \\ x_2 & = & -\frac{1}{R}x_1 + \frac{E}{R}quad\text{équation d'une droite de pente } \frac{-1}{R} \end{array} \right.$$

en remplaçant x_2 on obtient

$$h(x_1) = \frac{-1}{R}x_1 + \frac{E}{R}$$

qui est à résoudre graphiquement en utilisant la caractéristique de la diode tunnel (Figure 1.3)

Pour R fixe et E variable, on peut avoir de 1 à trois points de repos avec deux points dans le cas limite.

Corrigé Exercice 1.6

1. L'application de la loi de noeuds au circuit de la figure 1.4 donne

$$i_C = C\frac{d}{dt}$$

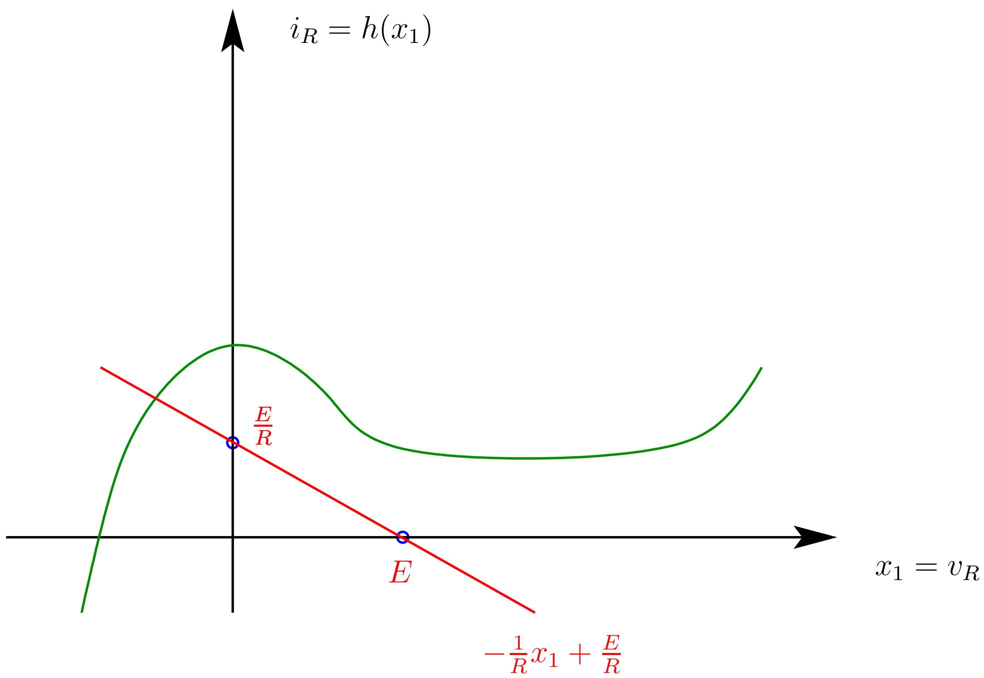


Figure 1.3 – Solution graphique.

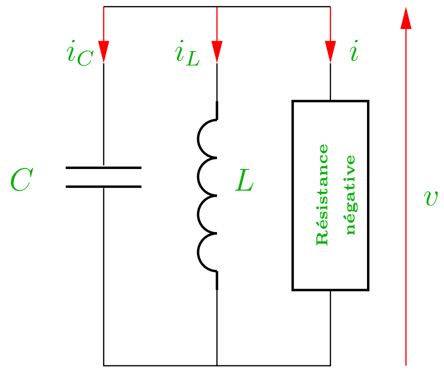


Figure 1.4 – Oscillateur à résistance négative.

la tension au borne du condensateur et de la bobine sont données par

$$\begin{aligned} i_C &= C\frac{dv}{dt} \\ v &= L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau \end{aligned}$$

pour la résistance négative on a

$$i = h(v)$$

On remplace i_C, i_L et i dans l'équation des courants

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau + h(\tau) = 0$$

On dérive par rapport au temps pour éliminer l'intégrale et on divise par C, on obtient

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{C}h'(v)\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0}$$

2. En faisant le changement de variable

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

on a

$$\begin{array}{ll} dt & = \sqrt{LC}d\tau \\ dt^2 = LCd\tau^2 & \end{array}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle en t on obtient

$$\frac{d^2v}{LCd\tau^2} + \frac{h'(v)}{C\sqrt{LC}}\frac{dv}{d\tau} + \frac{v}{LC} = 0$$

en multipliant par LC on a

$$\boxed{\frac{d^2v}{d\tau^2} + \sqrt{\frac{L}{C}}h'(v)\frac{dv}{d\tau} + v = 0}$$

3. La dernière équation différentielle est de la forme

$$\ddot{v} + f(v)\dot{v} + g'v) = 0$$

avec

$$\begin{array}{ll} f(v) & = \sqrt{L}Ch'(v) \\ g(v) & = v \end{array}$$

4. Pour $h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$ on a $h'(v) = -1 + v^2$, l'équation différentielle du circuit est alors

$$\ddot{v} - \sqrt{\frac{L}{C}}(1 - v^2)\dot{v} + v = 0$$

soit

$$\boxed{\ddot{v} + \varepsilon h'(v) + v = 0} \tag{1.1}$$

avec $\varepsilon = \sqrt{\frac{L}{C}}$

5. On choisit nos variables d'état

$$\begin{array}{ll} x_1 & = v \\ x_2 & = \dot{v} \end{array}$$

on obtient alors

$$\dot{x}_1 = \dot{v} = x_2$$

pour x_2

$$\dot{x}_2 = \ddot{v}$$

d'après (1.1

$$\ddot{v} = -\varepsilon h'(v)\dot{v} + v$$

la représentation d'état est alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2 \end{array} \right.$$

6. On choisit maintenant

$$\begin{aligned} z_1 &= i_L \\ z_2 &= v_C = v = v_L \end{aligned}$$

on tire alors

$$\dot{z}_1 = \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_L = \frac{z_2}{L}$$

pour z_2

$$\dot{z}_2 = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} i_C$$

soit

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{C}\left(-i_L - i\right) = -\frac{1}{C}\left(i_L + 1\right)$$

on remplace z_1 et z_2

$$z_2 = -\frac{1}{C}\left(i_L + h(v)\right) = -\frac{1}{C}\left(z_1 + h(z_2)\right)$$

la nouvelle représentation d'état est donc

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{z_2}{L} \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{C}\left(z_1 + h(z_2)\right) \end{aligned}}$$

dans l'échelle de temps τ on remplace $dt = \sqrt{LC} d\tau$ on a alors

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_1}{\sqrt{LC} d\tau} = \frac{z_2}{L} \Rightarrow \frac{dz_1}{d\tau} = \sqrt{\frac{C}{L}} z_2 = \frac{1}{\varepsilon} z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{dz_2}{dt} = \frac{dz_2}{\sqrt{LC} d\tau} = -\frac{1}{C}\left(z_1 + h(z_2)\right) \end{aligned}$$

on déduit

$$\frac{dz_2}{d\tau} = -\frac{L}{C}\left(z_1 + h(z_2)\right) = -\varepsilon\left(z_1 + h(z_2)\right)$$

dans la base de temps τ on a

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{1}{\tau} z_2 \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= -\varepsilon\left(z_1 + h(z_2)\right) \end{aligned}}$$

7. Pour $(x_1, x_2) = (v, \dot{v})$ dans la base τ on a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon h'(x_1) x_2 \end{aligned}$$

Pour $(z_1, z_2) = (i_L, v)$ dans la base τ

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{\varepsilon} z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\varepsilon\left(z_1 + h(z_2)\right) \end{aligned}$$

on voit directement que

$$x_1 = v = z_2$$

pour x_2

$$x_2 = \dot{v} = \frac{dv}{d\tau} = \dot{z}_2 = -\varepsilon\left(z_1 + h(z_2)\right)$$

soit

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\varepsilon\left(z_1 + h(z_2)\right) \end{bmatrix}}$$

en inversant

$$z_2 = x_1$$

et

$$z_1 = -\frac{x_2}{\varepsilon} - h(z_2) = -\frac{x_2}{\varepsilon} - h(x_1)$$

la relation entre les z et les x est donc

$$\boxed{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_2}{\varepsilon} - h(x_1) \\ x_1 \end{bmatrix}}$$

Corrigé Exercice 1.7

On choisit les variables d'état

$$\begin{array}{ccc} x_1 = q_1 & ; & x_2 = q_2 \\ x_3 = \dot{q}_1 & ; & x_4 = \dot{q}_2 \end{array}$$

on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} I\ddot{q}_1 + Mgl\sin q_1 + K(q_1 - q_2) & = & 0 \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) & = & u \end{array}\right.$$

pour x_1

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 = x_3$$

pour x_2

$$\dot{x}_2 = \dot{q}_2 = x_4$$

et pour x_3

$$\dot{x}_3 = \ddot{q}_1$$

en dérivant

$$\ddot{q}_1 = -\frac{Mgl}{I}\sin q_1 + \frac{K}{I}(q_2 - q_1)$$

soit

$$\boxed{\dot{x}_3 = -\frac{Mgl}{I}\sin x_1 + \frac{K}{I}(x_2 - x_1)}$$

pour x_4

$$\dot{x}_4 = \ddot{q}_2 = \frac{K}{J}(q_1 - q_2) + \frac{u}{J}$$

soit

$$\dot{x}_4 = \frac{K}{J}(x_{-}x_2) + \frac{u}{J}$$

la représentation d'état est alors

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_4 \\ \dot{x}_3 & = & -\dfrac{Mgl}{I}\sin x_1 + \dfrac{K}{I}(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_4 & = & \dfrac{K}{J}(x_1 - x_2) + \dfrac{u}{J} \end{array}\right.}$$

sous la forme générale

$$\dot{x}_1 = f(x) + g(x)u$$

avec

$$x = [q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2]$$

avec

$$\boxed{f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ -\dfrac{Mgl}{I}\sin x_1 + \dfrac{K}{I}(x_2 - x_1) \\ \dfrac{K}{J}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}}$$

et

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \\ g_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{bmatrix}$$

Corrigé Exercice 1.8

(a) La figure du pendule iverse avec les grandeurs caractéristiques est données ci-dessous

En négligeant l'inertie de la barre, l'énergie cinétique T est la somme de celle du chariot et de la bille

$$T = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2$$

avec

$$\vec{v_M} = \frac{d\left(\vec{OM}\right)}{dt} = \frac{d\left(\xi_1\vec{u_x}\right)}{dt} = \dot{x}i_1\vec{u_x}$$

et

$$\vec{v_m} = \frac{d\left(\vec{Om}\right)}{dt}$$

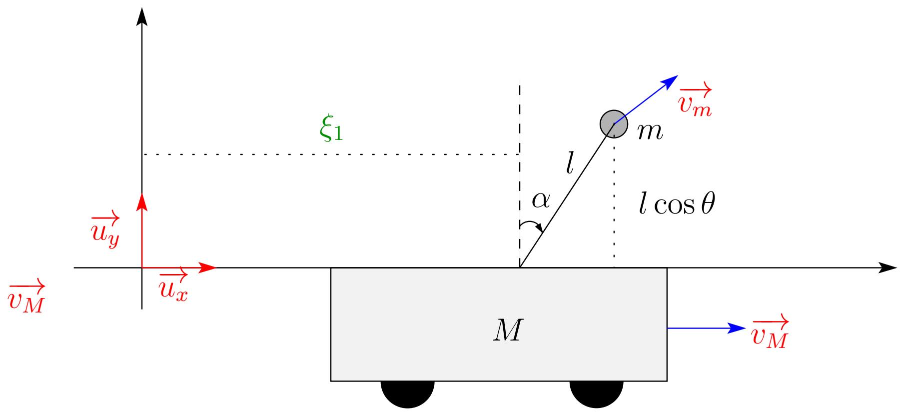


Figure 1.5 – Pendule inverse.

où

$$\vec{Om} = (\xi_1 + l\sin\theta)\vec{u_x} + l\cos\theta\vec{u_y}$$

soit

$$\vec{v_m} = (\dot{x}i_1 + l\dot{\theta}\cos\theta)\vec{u_x} - l\dot{\theta}\sin\theta\vec{u_y}$$

on déduit le module de v_m

$$\begin{aligned} v_m^2 &= \left(\dot{x}i_1^2 + l\dot{t}heta\cos\theta\right)^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \\ &= \dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}i_1\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

l'énergie cinétique est donc

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}i_1\dot{\theta}\cos\theta$$

L'énergie potentielle est l'énergie gravitationnelle de m

$$V = mg\xi_2 = mgl\cos\theta$$

(b) Le Lagrangien est donné par

$$\begin{aligned} &L = T - V \\ &\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}i_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\xi_1\dot{\theta}\cos\theta - mgl\cos\theta \end{aligned}$$

(c) Equations d'Euler-Lagrange. Si $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$ sont les coordonnées généralisées, alors

$$L(q,\dot{q}) = T(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n) - V(q_1,\ldots,q_n)$$

On rappelle que les équations d'Euler-Lagrange sont données par

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i, \quad i = 1,n}$$

où u_i est la force généralisée pour le pendule inverse,

$$q = (q_1, q_2) = (\xi_1, \theta)$$

d'après l'expression du Lagrangien, on a

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} = (M+m)\xi_1 + ml\dot{\theta}\cos\theta$$

pour θ

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -ml\dot{x}i_1\dot{\theta}\sin\theta + mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml\dot{\xi}_1\cos\theta + ml^2\dot{\theta}\end{aligned}$$

on calcule maintenant les équations dynamiques de ξ_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_1} = u$$

on obtient

$$(M+m)\ddot{x}i_1 + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = u$$

pour θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

après calcul, on obtient

$$\boxed{ml\ddot{x}i_1 + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0}$$

8. On souhaite maintenant obtenir la représentation d'état à partir des équations dynamiques, on choisit le vecteur d'état suivant

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \theta \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

pour les deux premières variables d'état, on a

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& \dot{x}i_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 &=& \dot{\theta} = x_4 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& x_3 \\ \dot{x}_2 &==& x_4 \end{array} \right.$$

sous forme matricielle, les équations de Lagrange obtenues précédemment s'écrivent

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2 \end{pmatrix}}A \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u + ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ mgl\sin\theta \end{pmatrix}}B$$

soit

$$A\begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \theta \end{pmatrix} = B \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \theta \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

on a

$$\begin{aligned}\det(A) &= (M+m)ml^2 - (ml)^2\cos^2\theta \\ &= Mml^2 + \sin^2\theta(ml)^2 = ml^2(M + m\sin^2\theta)\end{aligned}$$

et

$$A^{-1} = \frac{cof^T(A)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} ml^2 & -ml\cos\theta \\ -ml\cos\theta & M+m \end{bmatrix}}{\det(A)}$$

après calcul et simplification, la représentation d'état du système chariot-pendule est donnée par

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \dfrac{mlx_4^2\sin x_2 - mg\sin x_2\cos x_2}{M+m\sin^2 x_2} \\ \dfrac{-mlx_4^2\sin x_2\cos x_2 + (M+m)g\sin x_2}{l(M+m\sin^2 x_2)} \end{bmatrix} + \frac{1}{l(M+m\sin^2 x_2)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ -\cos x_2 \end{bmatrix} u}$$

Corrigé exercices chapitre n° 2

Plan de phase, bifurcations

Corrigé Exercice 2.1

1. Les points singuliers du système vérifient

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & 0 \Leftrightarrow -x_1 + x_1^3 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1^2 - 1) = 0 \\ \dot{x}_2 & = & 0 \Leftrightarrow -2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \end{array}$$

l'équation en x_1 admet trois solutions : $x_1 = 0, x_1 = -1$ et $x_1 = 1$. Le système admet donc trois points singuliers

$$\boxed{x_{e_1}(0,0) \quad ; \quad x_{e_2}(1,0) \quad ; \quad x_{e_3}(-1,0)}$$

2. Le linéarisé tangent $\dot{X} = AX$ est calculé à partir de la matrice jacobienne de $f(x)$

$$\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 & = & f_2(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

on a

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_e} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -1 + x_1^3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{x_e}$$

pour $x_{e_1}(0,0)$ on obtient

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -1 \\ \lambda_2 & = & -2 \end{array} \right.$$

$x_{e_1}(0,0)$ est un *noeud stable* car il possède deux valeurs propres réelles strictement négatives.
Pour les deux autres points singuliers $x_{e_2}(1,0)$ et $x_{e_2}(-1,0)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

Ces deux points sont donc *deux points cols.*

3. Les équations de x_1 et x_2 sont découplées. D'après la deuxième équation, $\dot{x}_2 = -2x_2$ alors $x_2(t) \to 0, \forall x_2(0)$, par conséquent, toutes les trajectoires tendent vers l'axe x_1 ($x_2 = 0$. Pour x_1 :

(a) Si $0 < |x_1(0)| < 1$ alors

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(x_1^2 - 1) < 0 \text{si} 0 < x_1 < 1 \\
\dot{x}_1(t) &= x_1(x_1^2 - 1) > 0 \text{si} -1 < x_1 < 0
\end{aligned}$$

alors x_1 se dirige vers $x_1 = 0$. En résumé, dans la région $-1 < x_1 < 1$ toutes les trajectoires sont attirés par l'origine.

(b) Si $|x_1(0)| = 1$ alors $\dot{x}_1(t) = 0$. Pour $x_1(0) = 1$, la trajectoire est attiré par $x_{e_2}(1, 0)$. Pour $x_1(0) = -1$, la trajectoire est attiré par $x_{e_3}(-1, 0)$.

(c) Si $x_1(0) > 1$ alors $\dot{x}_1(t) > 0$ alors $x_1(t) \to +\infty$. L'axe x_1 est une asymptote.

(d) Si $x_1(0) < -1$ alors $\dot{x}_1(t) < 0$ alors $x_1(t) \to -\infty$. L'axe x_1 est une asymptote.

Le portrait de phase du système obtenu avec la fonction `pplane` sous Matlab est donné par la figure 2.1.

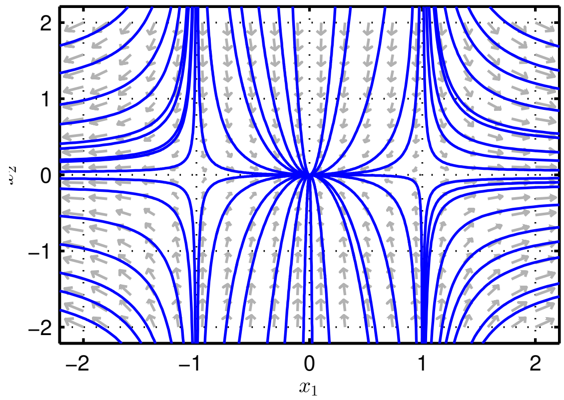


Figure 2.1 – Portrait de phase du système.

Corrigé Exercice 2.2

1. On utilise deux méthodes pour calculer le linéarisé tangent autour de x_e

Méthode 1 : Calculer

$$A = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right)_{x_e}$$

On a

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e=0} = \left(\begin{array}{cc} 3ax_1^2 + ax_2^2 & -1 + 2ax_1x_2 \\ 1 + 2ax_1x_2 & ax_1^2 + 3ax_2^2 \end{array} \right)_{(0,0)}$$

soit

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

Méthode 2 : (a) Faire le changement de variable $X = x - x_e$

(b) Obtenir la nouvelle représentation $\dot{X} = F(X)$

(c) Faire le développement limité d'ordre 1 de F_1 et F_2 autour de l'origine pour obtenir le développement limité d'ordre 1 de f autour de x_e

(d) Écrire le développement limité sous forme matricielle et déduire A

Dans cet exercice,les termes non linéaires sont déjà sous forme polynomiale (développement limité). On garde seulement les termes d'ordre 1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}$$

sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}^{A}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de A

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm j$$

On déduit que $\forall a$, l'origine $O(0,0)$ est un point centre pour le linéarisé tangent. Pour le système non linéaire, on ne peut rien conclure concernant la forme du portrait de phase, il s'agit d'un cas limite car les deux valeurs propres sont sur l'axe imaginaire.

2. On passe aux coordonnées polaires

$$\begin{aligned}x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\sin\theta\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}r &= (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta &= \arctan\frac{x_2}{x_1}\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\dot{r} =& \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\ =& \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_1\left(-x_2+ax_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_2\left(x_1+ax_2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)\end{aligned}$$

on a alors

$$\dot{r} = r^{-1}\left(r^2a\left(x_1^2+x_2^2\right)\right) = ar^3$$

donc

$$\boxed{\dot{r} = ar^3}$$

On calcule maintenant la dynamique de θ. On rappelle que $\arctan'(y) = \dfrac{1}{y^2+1}$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} \tag{2.1}$$

$$= \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\right)\left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{x_1}\right)\dot{x}_2 \tag{2.2}$$

soit

$$\dot{\theta} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \left(-x_2\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_2\right)$$

après simplification

$$\boxed{\dot{\theta} = 1}$$

Remarque 2.1 *Une autre façon de calculer $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$ est de voir directement r et θ comme des fonctions composées du temps. On peut alors écrire*

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\right) \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \left(\frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2}\right)} \end{aligned}$$

et on continue les calculs.

L'équation d'état en coordonnées polaires est finalement

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{r} &=& ar^3 \\ \dot{\theta} &=& 1 \end{array}}$$

L'équation $\dot{\theta} = 1$ signifie ques toutes les trajectoires tournent à une vitesse constante égale à 1 dans le sens direct (trigonométrique). Pour la valeur de r, on a 3 cas :

(a) Si $a < 0$, comme $r > 0$ alors $\dot{r} < 0$. on déduit que $r(t)$ décroît et tend vers zéro

$$\lim_{t \to +\infty} r(t) = 0$$

l'origine est un *foyer stable.*

(b) Si $a > 0$ alors $\dot{r} > 0$ et $r(t)$ est strictement croissant. On a alors

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = +\infty$$

L'origine est un *foyer instable.*

(c) Si $a = 0$ alors $\dot{r} = 0$ et $r = Cte = r(0)$. L'origine est un *point centre.*

Ces trois cas sont illustrés pour $a = 1$, $a = -1$ et $a = 0$

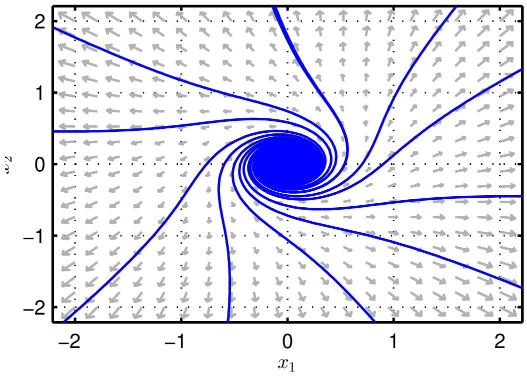
Corrigé Exercice 2.3

1. La masse est soumise à la force F dérivant du potentiel V

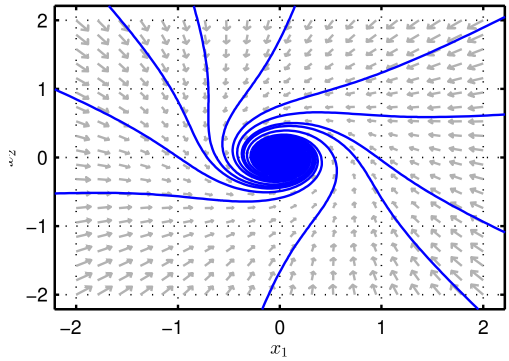
$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}V \Rightarrow F = -\frac{dV}{dt} = x - x^3$$

l'équation du mouvement $m\ddot{x} = F$ pour $m = 1$ s'écrit

$$\boxed{\ddot{x} = x - x^3}$$



(a) $a = 1$



(b) $a = -1$

Figure 2.2 – Foyers stables et instables.

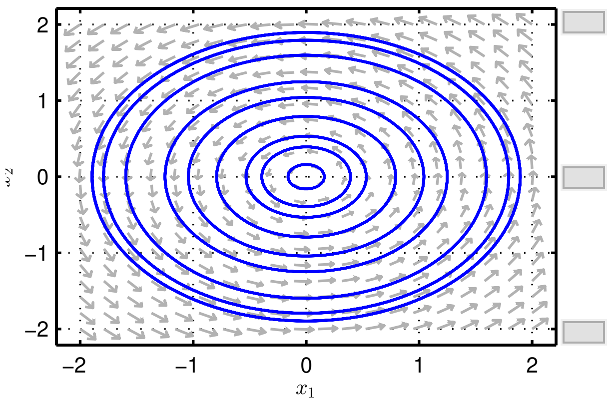


Figure 2.3 – $a = 0$

2. On choisit

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & x \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ x - x^3 = x_1 - x_1^3 \dot{x}_2 & = & \ddot{x} = \end{array}$$

l'équation d'état du système est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - x_1^3 \end{array}}$$

Les points singuliers du système vérifient

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_1 - {x_1}^3 & = & 0 \Rightarrow x_1(1 - {x_1}^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = \pm 1 \end{array}$$

on a ainsi trois points singuliers

$$\begin{array}{c} x_{e_1}(0,0) \\ x_{e_{2,3}}(\pm 1, 0) \end{array}$$

La matrice d'état du linéarisé tangent est

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial c}\right|_{x_e} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-3x_1^2 & 0 \end{array}\right)_{x_e}$$

pour $x_{e_1}(0,0)$ on a

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow |A_1 - \lambda I| = \left|\begin{array}{cc} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{array}\right| = \lambda^2 - 1 = 0$$

on obtient $\lambda_{1,2} = \pm 1$. L'origine est un *point col.* C'est aussi le cas pour le système no linéaire.
Pour $x_{e_{2,3}}(\pm 1, 0)$ on a

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow |A_{2,3} - \lambda I| = \left|\begin{array}{cc} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{array}\right| = \lambda^2 + 2 = 0$$

on obtient $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}j$. Ces points singuliers sont des points centre pour le linéarisé tangent, mais on ne peut rien conclure pour le système non linéaire. On peut alors faire une analyse par quadrant

(a) $x_1 > 0$ et $x_2 > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 > 0 \Rightarrow x_1$ est croissant : Les trajectoires se dirigent toujours à droite.

(b) $x_1 > 0$ et $x_2 < 0 \Rightarrow \dot{x}_1 < 0$: Les trajectoires se dirigent à gauche.

(c) $x_1 < 0$ et $x_2 > 0 \Rightarrow \dot{x}_1 > 0$: Les trajectoires se dirigent vers la droite.

(d) $x_1 < 0$ et $x_2 < 0 \Rightarrow \dot{x}_1 < 0$: Les trajectoires se dirigent à gauche.

Par analogie avec la mécanique, on peut calculer l'énergie du système

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1^4$$

en dérivant par rapport au temps

$$\frac{dE}{dt} = x_2\dot{x}_2 - x_1\dot{x}_1 + x_1^3\dot{x}_1 = x_2(\dot{x}_1 - x_1^3) - x_1x_2 + x_1^3x_2 = 0$$

On déduit alors que

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = Cte}$$

Le système est conservatif. ces trajectoires (positions, vitesses) sont fermées. Le portrait de phase du système obtenu avec la fonction `pplane` sous Matlab est donné ci-dessous

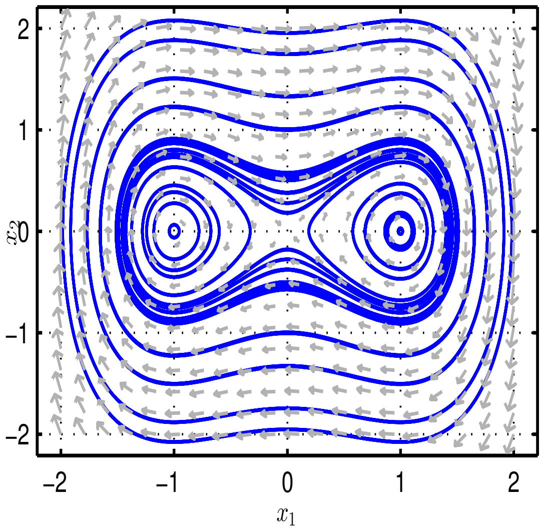


Figure 2.4 – Portrait de phase du système.

Corrigé exercices chapitre n$^\circ$ 3

Méthode du premier harmonique

Corrigé Exercice 3.1

1. La caractéristique de l'hysterisis est rappelée sur la figure 3.1

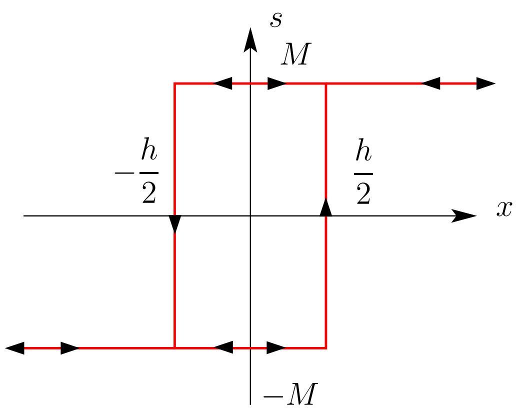


Figure 3.1 – Caractéristique d'un relai à hysterisis.

On note S^- la sortie passée et S^+ la sortie future. Comme lemontre la figure, on a deux cas :

Cas 1 :

$$\text{Si } S^- = +M \text{ alors } S^+ = \begin{cases} +M & \text{si} \quad x \geq -\dfrac{h}{2} \\ -M & \text{si} \quad x < \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Cas 2 :

$$\text{Si } S^- = -M \text{ alors } S^+ = \begin{cases} -M & \text{si} \quad x \leq -\dfrac{h}{2} \\ -M & \text{si} \quad x > \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

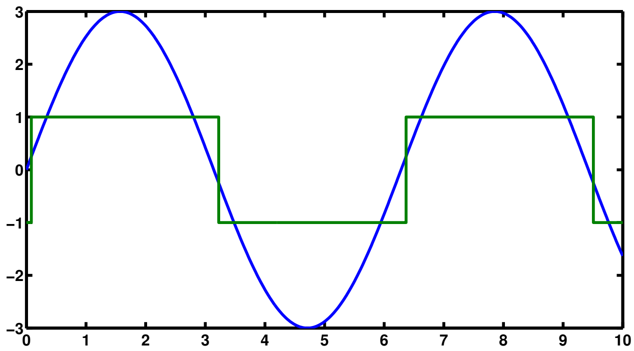


Figure 3.2 – Sortie du relai à hysterisis pour une entrée sinusoidale.

On suppose que $S(0) = -M$ et que $A > \frac{h}{2}$ la sortie est donnée par

$$S(t) = \begin{cases} -M & 0 \leq t < t_b \\ +M & t_b < t \leq \frac{T}{2} + t_b \\ -M & \frac{T}{2} + t_b < b < T \end{cases}$$

Le basculement de $-M$ à $+M$ se produit à l'instant t_b tel que

$$A\sin(\omega t_b) = \frac{h}{h} \Rightarrow \sin(\omega t_b) = \frac{A}{2h}$$

La sortie du relai à hysterisis est donnée sur la figure 3.2. Pir cet exemple, on a pris $A = 3, M = 1, \omega = 1\text{rad/s}$ et $h = 0.5$.

On calcule les coefficients de la série de Fourier

$$\begin{aligned} a_1 = & \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(\omega t)dt \\ = & \frac{4}{T}\left[\left(-\frac{M}{\omega}\sin(\omega t)\right)_0^{t_b} + \left(\frac{M}{\omega}\sin(\omega t)\right)_{t_b}^{\frac{T}{2}}\right] \end{aligned}$$

Comme $T\omega = 2\pi$ et $\sin(\omega t_b) = \frac{h}{2}$, on obtient après calcul

$$\boxed{a_1 = -\frac{2Mh}{\pi A}}$$

Calcul de b_1

$$\begin{aligned}
b_1 =& \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(\omega t)dt \\
=& \frac{4}{T}\left[\int_0^{t_b} s(t)\sin(\omega t)dt + \int_{t_b}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(\omega t)dt\right] \\
=& \frac{4}{T}\left[\int_0^{t_b} -M\sin(\omega t)dt + \int_{t_b}^{\frac{T}{2}} M\sin(\omega t)dt\right] \\
=& \frac{4}{T}\left[\left(\frac{M}{\omega}\cos(\omega t)\right)_0^{t_b} + \left(-\frac{M}{\omega}\cos(\omega t)\right)_{t_b}^{\frac{T}{2}}\right]
\end{aligned}$$

comme $\sin(\omega t_b) = \frac{h}{}2A$ alors $\cos(\omega t_b) = \sqrt{1-\left(\frac{h}{2A}\right)^2}$, on obtient après calcul et simplification

$$\boxed{b_1 = \frac{4M}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{h}{2A}\right)}}$$

Le gain complexe équivalent $N(A) = \frac{b_1}{A} + j\frac{a_1}{A}$ est donc

$$\boxed{N(A) = \frac{4M}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{h}{2A}\right)} - j\frac{2Mh}{\pi A^2}}$$

Pour le tracé du gain complexe équivalent, comme

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}\underbrace{\left[\sqrt{1-\left(\frac{h}{2A}\right)^2} - j\frac{h}{2A}\right]}_{\text{Module=1}}$$

alors

$$\boxed{|N(A)| = \frac{4M}{\pi A}}$$

Pour l'argument, on sait que

$$\arg(N(A)) = \arg\left[\sqrt{1-\left(\frac{h}{2A}\right)^2} - j\frac{h}{2A}\right] = \arcsin(-\frac{h}{2A})$$

soit

$$\boxed{\arg(N(A)) = -\arcsin\left(\frac{h}{2A}\right)}$$

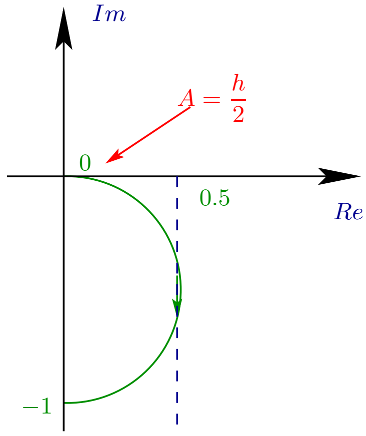


Figure 3.3 – Lieu critique d'un relai à hysterisis.

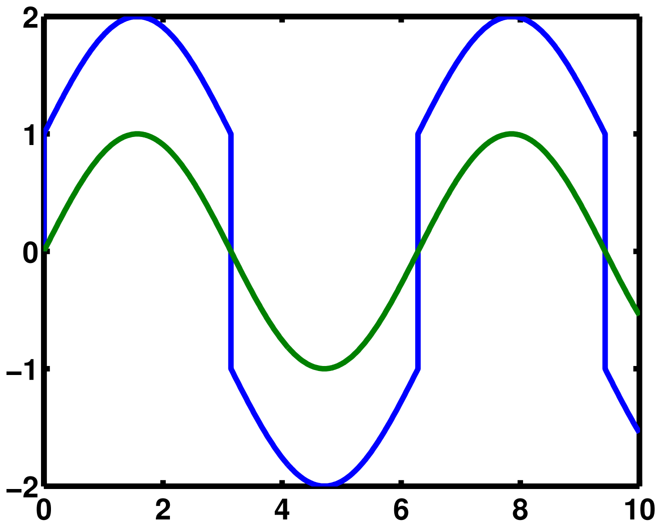


Figure 3.4 – Sortie de la non linéarité.

Corrigé Exercice 3.2

1. La sortie de la non linéarité est donnée sur la figure 3.4

$$\Phi(u) = s = \begin{cases} u+1 & \text{si} \quad u > 0 \\ 0 & si \quad u \leq 0 \\ u-1 & si \quad u < 0 \end{cases}$$

pour $u(t) = A\sin(\omega t)$, on a

$$s(t) = \begin{cases} A\sin(\omega t) + 1 & \text{si} \quad 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ A\sin(\omega t) - 1 & si \quad \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

2. $a_1 = 0$ car $\Phi(.)$ est impaire

$$\begin{aligned} b_1 =& \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt = 4\times\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} s(t)\sin(\omega t)dt \\ =& \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} s(t)\sin(\omega t)dt \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $\tau = \omega t$ et comme $\omega T = 2\pi$ on a

$$\begin{aligned} b_1 =& \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\sin^2(\tau)d\tau + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\tau)d\tau\right] \\ =& \frac{4}{\pi}\left[\frac{A}{2}\int_0^{\frac{pi}{2}} (1-\cos(2\tau))d\tau + 1\right] \end{aligned}$$

après calcul, on obtient

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\left(A\frac{\pi}{4}+1\right) = A + \frac{4}{\pi}$$

Le gain complexe équivalent est alors donné par

$$\boxed{N(A) = \frac{b_1}{A} = 1 + \frac{4}{A\pi}}$$

3. On a

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+3)^3}$$

son module est donné par

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{(\omega^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

et son argument

$$\arg(G(j\omega)) = -3\arctan\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

Pour avoir des oscillations, comme $C(A) \in \mathbb{R}^-$, on doit avoir $\arg(G(j\omega)) = -\pi$ soit

$$-3\arctan(\frac{\omega}{3}) = -\pi$$

on déduit pulsation des oscillation ω_0

$$\omega_0 = 3\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5.196 rad/s$$

Pour le calcul de l'amplitude des oscillations, on a

$$\begin{aligned} G(j\omega)N(A) =& -1 \\ \left(1+\frac{4}{A\pi}\right)G(j\omega) =& -1 \end{aligned}$$

on tire alors

$$1 + \frac{4}{A\pi} = -\frac{1}{G(j\omega_0}$$

comme $G(j\omega_0) = |G(j\omega_0|$ alors

$$1 + \frac{4}{A\pi} = \frac{1}{|G(j\omega_0)|} \Rightarrow \frac{4}{A\pi} = \frac{1 - |G(j\omega_0)|}{|G(j\omega_0)|}$$

on déduit que

$$A = \frac{A\,|G(j\omega_0)|}{\pi\,(1 - |G(j\omega_0)|)}$$

comme

$$|G(j\omega_0)| = \frac{1}{(\omega_0^2 + 9)^{\frac{3}{2}}}$$

on obtient

$$\boxed{A = \frac{4\left(\dfrac{1}{(\omega_0^2 + 9)^{\frac{3}{2}}}\right)}{\pi\left(1 - \dfrac{1}{(\omega_0^2 + 9)^{\frac{3}{2}}}\right)}}$$

Corrigé Exercice 3.3

1. La sortie de la non linéarité est donnée sur la figure 3.5

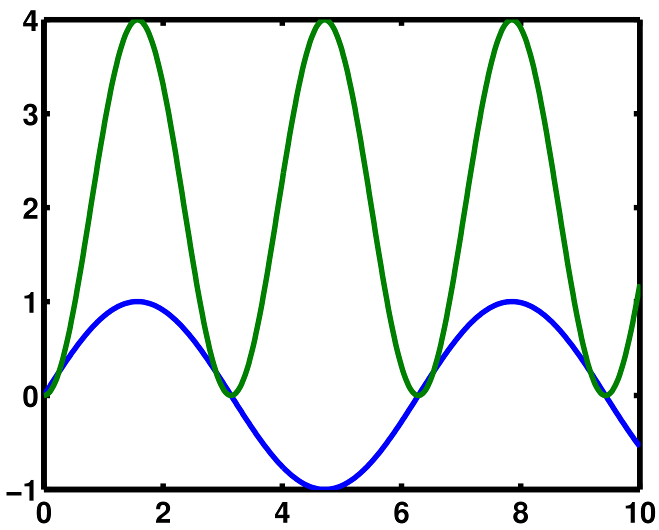


Figure 3.5 – Sortie de la non linéarité parabolique.

2.

$$s(t) = kA^2 \sin^2(\omega t)$$

3.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt \\ b_1 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt \end{aligned}$$

par symétrie, on peut prévoir que

$$\boxed{a_1 = b_1 = 0}$$

on peut également faire le calcul

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T kA^2 \sin^2(\omega t)\cos(\omega t)dt$$

on fait le changement de variable $\tau = \omega t$, soit $d\tau = \omega dt$. Comme $\omega T = 2\pi$ alors

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} \frac{k}{\omega} A^2 \sin^2(\tau)\cos(\tau)d\tau = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} kA^2 \sin^2(\tau)\cos(\tau)d\tau \\
&= \frac{kA^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2\tau))\cos(\tau)d\tau \\
&= \frac{kA^2}{2\pi}\left([A\sin(\tau)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(2\tau)\cos(\tau)d\tau\right) \\
&= -\frac{kA^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\tau)\cos(\tau)d\tau \\
&= -\frac{kA^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(3\tau)-\cos(\tau)] \\
&= -\frac{kA^2}{4\pi}\left[\frac{1}{3}\sin(3tau) - \sin(\tau)d\tau\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{a_1 = 0}$$

de même pour b_1

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T kA^2 \sin^2(\omega t)\sin(\omega t)dt$$

on fait le changement de variable $\tau = \omega t$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} \frac{k}{\omega} A^2 \sin^3(\tau)d\tau = \frac{kA^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3(\tau)d\tau \\
&= \frac{kA^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2\tau))\sin(\tau)d\tau \\
&= \frac{kA^2}{2\pi}\left([-\cos(\tau)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(2\tau)\sin(\tau)d\tau\right) \\
&= \frac{kA^2}{2\pi}\left(-\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin(3\tau)-\sin(\tau))\right)d\tau \\
&= -\frac{kA^2}{4\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos(3\tau)+\cos(\tau)\right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{b_1 = 0}$$

Finalement

$$N(A) = \frac{b_1}{A}j + \frac{a_1}{A} = 0$$

Le gain complexe équivalent est nul.

4. Un gain complexe équivalent correspond à l'absence de non linéarité. Ceci peut être expliqué dans ce cas par le fait que cet élément non linéaire double la période. La mise en boucle fermée entraîne donc sa disparition.

Corrigé Exercice 3.4

1. La sortie de la non linéarité relai est donnée sur la figure 3.6. Dans ce cas on a choisis $A = 3, M = 1$ et $\omega = 1$rad/s

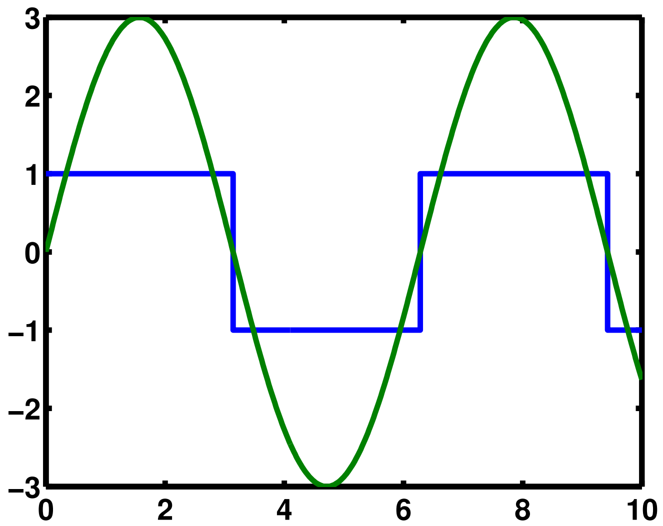


Figure 3.6 – Sortie de la non linéarité relai.

2. On a

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u > 0 \\ 0 & \text{si} \quad u = 0 \\ -1 & \text{si} \quad u < 0 \end{cases}$$

par symétrie, $a_1 = 0$ (car $s(t)$ est une fonction impaire). pour b_1

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t)dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \sin(\omega t)dt\right]$$
$$= \frac{2}{T}\left(2\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t)dt\right)$$

on pose $\tau = \omega t$

$$b_1 = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)d\tau = \frac{4}{2\pi}\left[-\cos\tau\right]_0^{\pi}$$

soit

$$b_1 = \frac{4}{\pi}$$

Le gain complexe équivalent est alors donné par

$$\boxed{N(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{4}{A\pi}}$$

3. Le lieu critique est

$$\boxed{C(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{A\pi}{4}}$$

LA fonction de transfert du filtre linéaire est

$$KG(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

soit sous forme algébrique

$$KG(j\omega) = -\frac{3K}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} + j\frac{K(\omega^2-2)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

pour le tracé du lieu de Nyquist, on a

$$\omega \to 0 \qquad \begin{cases} \Re KG &= -3\frac{K}{4} \\ \Im KG &\to -\infty \end{cases}$$

$$\omega \to +\infty \quad \begin{cases} \Re KG &= 0 \\ \Im KG &= 0 \end{cases}$$

On a $\Im KG = 0$ si $\omega^2 = 2$ soit

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{2} \text{ rad/s}}$$

Corrigé Exercice 3.5

1. D'après les équivalences des schémas blocs, si on a deux systèmes de fonction de transfert respectivement A et B, les deux boucle d'asservissement de la figure 3.7 sont équivalentes

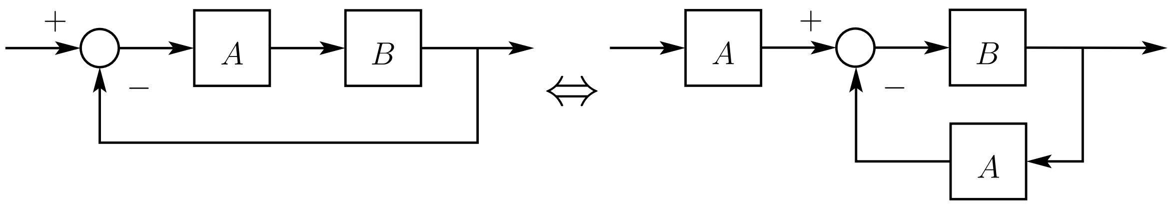
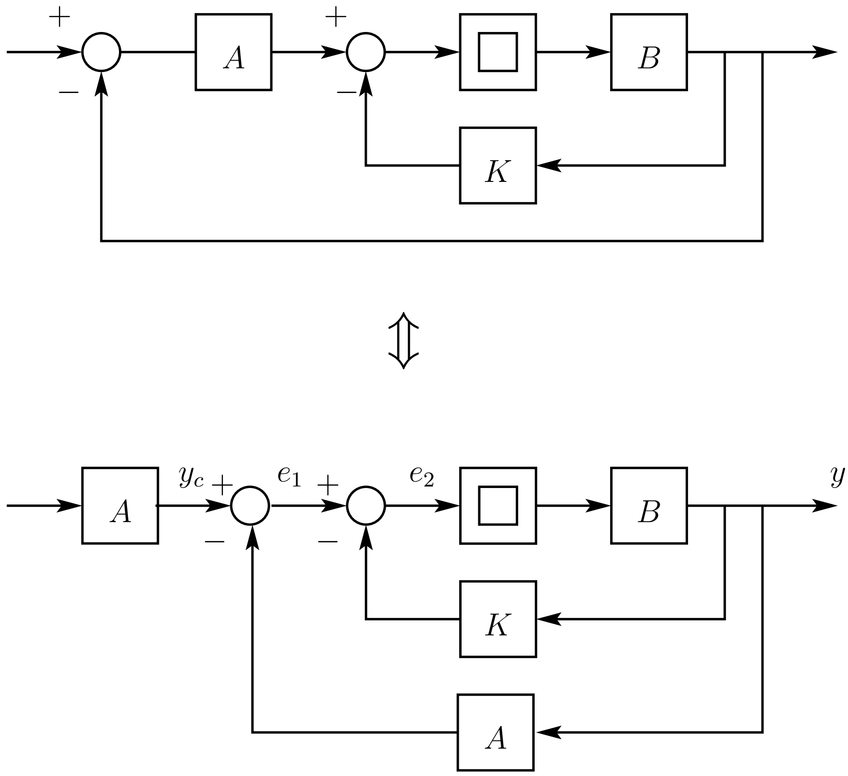


Figure 3.7 – Equivalences entre schémas blocs 1.

Par conséquent, en choisissant $A = \dfrac{k_1}{1+T_1 s}$ et $B = \dfrac{k_2}{s(1+T_2 s)}$, on a les deux structures de la figure 3.8 qui sont équivalentes

Enfin, la figure 3.9 explique la dernière simplification effectuée

En l'appliquant la structure de commande considérée, on obtient le schéma donné par la figure 3.10



$$e_2 = e_1 - Ky \quad ; \quad e_1 = y_c - Ay \Rightarrow e_2 = y_c - (A+K)y$$

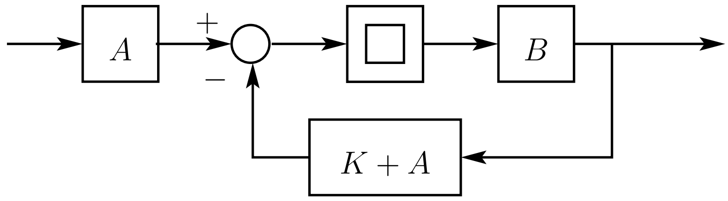


Figure 3.8 – Simplification de la boucle de commande.

2. Par un calcul similaire à l'exercice précédent, on a

$$s(t) = \begin{cases} +M & \text{si} \quad u > 0 \\ 0 & \text{si} \quad u = 0 \\ -M & \text{si} \quad u < 0 \end{cases}$$

Comme $s(t)$ est impaire, par symétrie on a

$$a_1 = 0$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt \\ &= \frac{2}{T}\left(2\int_0^{\frac{T}{2}} M\sin(\omega t)dt\right) \end{aligned}$$

on pose $\tau = \omega t$

$$b_1 = \frac{4M}{T}\int_0^{\pi} \frac{1}{\omega}\sin(\tau)d\tau = \frac{4M}{2\pi}\left[-\cos(\tau)\right]_0^{\pi}$$

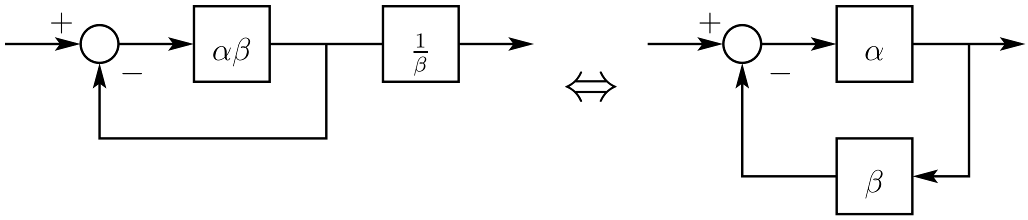
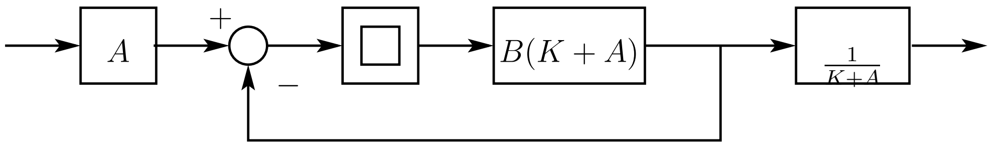


Figure 3.9 – Equivalences entre schémas blocs 2.



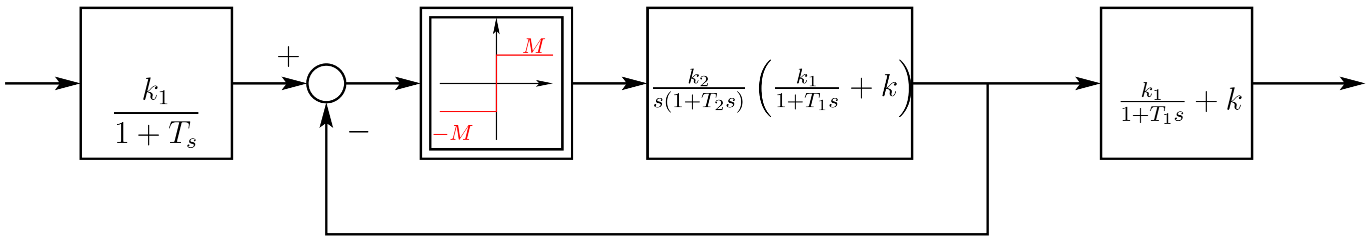


Figure 3.10 – Deuxième simplification de la boucle de commande.

comme $\omega T = 2\pi$, on obtient

$$b_1 = \frac{4M}{\pi}$$

soit

$$\boxed{N(A) = \frac{4M}{A\pi}}$$

3. La condition d'oescillations est

$$C(A) = -\frac{1}{N(A)}$$

soit

$$G_1(j\omega)N(A) + 1 = 0$$

autrement

$$G(j\omega) = C(A)$$

on a

$$G_1(j\omega) = \frac{k_2}{s(1+T_2 s)} \cdot \left(\frac{k_1}{1+T_1 s} + k\right)\Big|_{s=j\omega}$$

soit

$$\frac{4M}{\pi A} \cdot \frac{k}{s(1+T_2 s)} \left(\frac{k_1}{1+T_1 s} + k\right) + 1 = 0$$

$$T_1T_2s^3 + (T_1+T_2)s^2 + \left(1 + kk_2T_1\frac{4M}{\pi A}\right)s + k_2(k_1+k)\frac{4M}{\pi A}$$

en posant $s = j\omega$

$$-jT_1T_2\omega^3 - (T_1+T_2)\omega^2 + j\left(1 + \frac{4M}{\pi A}k_2kT_1\right)\omega + \frac{4M}{\pi A}k_2(k_1+k) = 0$$

on regroupe la partie réelle et imaginaire

$$\left[\frac{4M}{\pi A}k_2(k_1+k) - (T_2+T_1)\omega^2\right] + j\left[\left(1 + \frac{4M}{\pi A}k_2kT_1\right)\omega - T_1T_2\omega^3\right] = 0$$

soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{4M}{\pi A}k_2(k_1+k) - (T_1+T_2)\omega^2 & = & 0 \\ \left(1 + \frac{4M}{\pi A}k_2kT_1\right)\omega - T_1T_2\omega^3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Les inconnues sont A et ω. En multipliant la première équation par $-T_1T_2$ et la deuxième par (T_1+T_2) puis en sommant on obtient

$$\begin{array}{rcl} -\frac{4M}{\pi A}k_2(k_1+k)T_1T_2 + (1 + \frac{4M}{\pi A}k_2kT_1)(T_1+T_2) & = & 0 \\ -\frac{4M}{\pi A}k_2k_1T_1T_2 + (T_1+T_2) + \frac{4M}{\pi A}k_2kT_1^2 & = & 0 \\ -\frac{4M}{\pi A}k_2T_1(k_1T_2 - kT_1) + (T_1+T_2) & = & 0 \end{array}$$

on déduit A_0

$$\boxed{A_0 = \frac{4M}{\pi}\left(\frac{k_2T_1(k_1T_2 - kT_1)}{T_1+T_2}\right)}$$

On remplace A_0 pour déduire ω_0

$$\frac{4M}{\pi}\left[\frac{\pi}{4M}\frac{T_1+T_2}{k_2T_1(k_1T_2 - kT_1)}\right]k_2(k_1+k) - (T_2+T_1)\omega^2 = 0$$

on déduit

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k}{T_1(k_1T_2 - kT_1)}}}$$

Ceci est possible seulement si $k_1T_2 - kT_1 > 0$, la condition d'oscillation est

$$\boxed{0 < k < \frac{k_1T_2}{T_1}}$$

Corrigé exercices chapitre n° 4

Stabilité au sens de Lyapunov

Corrigé Exercice 4.1

On rappelle que pour trouver les points d'équilibre du système non linéaire autonome $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, on résoud le système d'équations algébriques non linéaires $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

(a)

$$0 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2, \tag{4.1}$$
$$0 = -x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = -x_1 \tag{4.2}$$

On remplace x_2 dans la première équation

$$-x_1 + 2x_1^3 - x_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^3 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1^2 - 1) = 0$$

deux valeurs possibles pour x_1

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x_1^2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ x_1 & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ x_1 & = & -1 \end{array}\right.$$

En déduisant $x_2 = -x_1$, on obtient trois points d'équilibre

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{e_1}(0,0) \\ x_{e_2}(1,-1) \\ x_{e_3}(-1,1) \end{array}}$$

(b)

$$0 = x_1 + x_1x_2 \Leftrightarrow x_1(1 + x_2) = 0 \Rightarrow 2 \text{ cas : } x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = -1 \tag{4.3}$$
$$0 = -x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1^3 \tag{4.4}$$

- Si $x_1 = 0$, on remplace dans l'équation précedente, on obtient

  $$-x_2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2(x_2 - 1) = 0$$

  deux solutions : soit $x_2 = 0$ ou $x_2 = 1$. On alors deux point d'équilibre : $x_{e_1}(0,0); x_{e_2}(0,1)$

- Si $x_2 = -1$, en remplaçant dans (4.4) : $1 + 1 - x_1 - x_1^3 = 0$, soit

$$x_1^3 + x_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 2) = 0$$

$$x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \tag{4.5}$$
$$x_1^2 - x_2 + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -7 < 0 \Rightarrow \text{pas de solution dans } \mathbb{R} \tag{4.6}$$

$\Rightarrow x_{e_3}(1, -1)$

Le système possède trois points d'équilibre

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{e_1}(0,0) \\ x_{e_2}(0,1) \\ x_{e_1}(1,-1) \end{array}}$$

(c)

$$x_1 \left(1 - x_1 - \frac{2x_2}{1 + x_1}\right) = 0 \tag{4.7}$$
$$x_2(2 - \frac{x_2}{1 + x_1}) = 0 \tag{4.8}$$

Pour vérifier (4.8), soit $x_2 = 0$ ou $2 = \dfrac{x_2}{1 + x_1}$

- Si $x_2 = 0$, on remplace dans (4.7) : $x_1(1 - x_1) = 0$, alors $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$. On a alors deux points d'équilibre $x_{e_1}(0, 0)$ et $x_{e_2}(1, 0)$.
- Si $\dfrac{x_2}{1 + x_1} = 2$, on remplace dans (4.8) on obtient $x_1(-x_1 - 3) = 0$, d'où $x_1 = 0$ ou $x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 2(1 + x_1)$. Pour $x_1 = 0$ on a $x_2 = 2$ et pour $x_1 = -3$ on a $x_2 = -4$. On a alors deux autres points d'équilibre $x_{e_3}(0, 2)$ et $x_{e_4}(-3, -4)$.

Ce possède possède 4 points d'équilibre

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{e_1}(0,0) \\ x_{e_2}(1,0) \\ x_{e_3}(0,2) \\ x_{e_4}(-3,-4) \end{array}}$$

(d)

$$0 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \tag{4.9}$$
$$0 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \tag{4.10}$$

- Si $(1 - x_1^2 - x_2^2 = 0)$, (4.9) et (4.10) sont vérifiées.

$$1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Le cercle unité (de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1) est un ensemble de points d'équilibre. Attention ! Ce n'est pas un cycle limite.

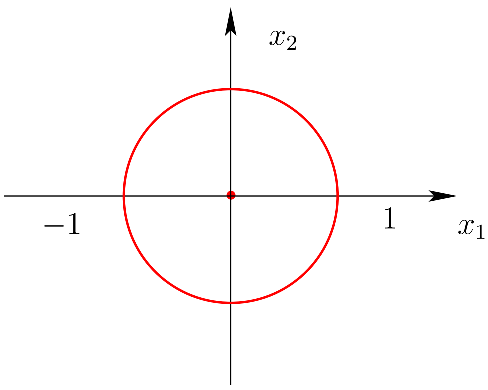


Figure 4.1 – Ensemble des points d'équilibre.

- Sinon, pour vérifier (4.9) : $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ On remplace dans (4.10)

$$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\boxed{x_{e_1}(0,0)}$$

Ensemble des points d'équilibre = $\{O(0,0)\} \bigcup$ cercle unité.

(e)

$$0 = -x_1^3 + x_2 \tag{4.11}$$
$$0 = x_1 - x_2^3 \tag{4.12}$$

(4.11) $\Rightarrow x_2 = x_1^3$, on remplace dans (4.12) on obtient

$$x_1 - \left(x_1^3\right)^3 = x_1 - x_1^9 = 0 \Leftrightarrow x_1(1 - x_1^8) = 0$$

soit x_1=0 ou $1 - x_1^8 = 0$. Les racines huitièmes réelles de 1 sont 1 et -1. En remplaçant x_1 dans $x_2 = x_1^3$, on obtient trois points d'équilibre

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{e_1}(0,0) \\ x_{e_2}(1,1) \\ x_{e_1}(-1,-1) \end{array}}$$

Corrigé Exercice 4.2

$$\dot{x}_1 = x_2 - \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^3 \tag{4.13}$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^3 \tag{4.14}$$

1. Points d'équilibre

   (4.13) $\Rightarrow \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^3 = x_2 \rightarrow$ on remplace dans (4.14). $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. On remplace à nouveau dans (4.13) ou (4.14) :

$$x_1 - \frac{1}{8}(2x_1)^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_1^3 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 - x_1 = 0$$

trois solutions possibles : $x_1 = 0, x_1 = \pm 1$. x_2 a la même valeur que $= x_1$. Le système possède trois points d'équilibre

$$\boxed{\begin{array}{c} x_{e_1}(0,0) \\ x_{e_2}(1,1) \\ x_{e_1}(-1,-1) \end{array}}$$

2. $\dot{X} = A_i X \quad ; \quad X = x - x_e \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$

$$A_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_{e_i}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_{e_i}}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8}(x_1+x_2)^2 & 1 - \frac{3}{8}(x_1+x_2)^2 \\ -\frac{3}{8}(x_1+x_2)^2 & -\frac{3}{8}(x_1+x_2)^2 \end{bmatrix}_{x=x_{e_i}}$$

on a alors

$$\text{Pour } x_{e_1}(0,0) : \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour } x_{e_{2,3}}(\pm 1, \pm 1) : \qquad A_{2,3} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

3. On calcule les valeurs propres des matrices d'état des linéarisés tangents

- $x_{e_1}(0,0)$:

$$|\lambda I_2 - A_1| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

On obtient $\lambda_1 = 1 > 0$ et $\lambda_2 = -1$. Le linéarisé autour de $x_{e_1}(0,0)$ est instable. On conclut que le système non linéaire est instable autour de l'origine.

- $x_{e_{2,3}}(\pm 1, \pm 1)$:

$$|\lambda I_2 - A_{2,3}| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

soit

$$\lambda + \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

on obtient $\lambda_1 = -1 < 0$ et $\lambda_2 = -2 < 0$. On conclut que le système non linéaire est localement asymptotiquement stable autour des deux points d'équilibre $x_{e_{2,3}}(\pm 1, \pm 1)$

Corrigé Exercice 4.3

1. Le calcul du linéarisé tangent autour de l'origine peut se faire par deux méthodes :

Méthode 1 : Pour linéariser autour de l'origine, on fait un développement limité autour de zéro d'ordre 1

$$\begin{aligned} DL_1(\cos x_1) =& 1 \\ DL_1(\sin x_1) =& x_1 \end{aligned}$$

On déduit que

$$DL_1(\cos^2 x_1) = 1$$

En remplaçant dans les équations d'état du système, on obtient le linéarisé tangent autour de l'origine

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 =& -2x_1 \\ \dot{x}_2 =& -2x_2 \end{aligned}$$

soit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Méthode 2 : On calcule le linéarisé tangent avec la méthode du jacobien évalué à l'origine

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_e}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 + 2x_2^2(-\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1) & 4x_2 \cos x_1 \sin x_1 \\ 4x_2 \cos x_1 \sin x_1 & -2\cos^2 x_1 \end{bmatrix}_{x_e(0,0)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

On remarque que le système est diagonal et possède une valeur propre double $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ qui est strictement négative.
On conclut que le système non linéaire est localement asymptotiquement stable autour de l'origine.

Corrigé Exercice 4.4

On a le système suivant

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \tag{4.15}$$
$$\dot{x}_2 = -ax_1 - bx_2 \tag{4.16}$$

avec $a > 0, b > 0$

1. En annulant $\dot{x}_2$ dans (4.15) on tire $x_2 = -\dfrac{a}{b}x_1$. En remplaçant dans (4.11) on obtient

$$-x_1^3 - \left(\frac{a}{b}\right) x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1^2 + \frac{a}{b}x_1) = 0$$

Comme $a > 0, b > 0$, l'équation admet une seule solution $x_1 = 0$ dans $\mathbb{R}$. Le système possède donc un seul point d'équilibre

$$\boxed{x_e(0,0)}$$

2. Pour le calcul du linéarisé tangent, on remarque que la dynamique des deux variables d'état est sous forme polynômiale (développement limité). Il suffit alors d'éliminer les termes d'ordre supérieur à 1 pour obtenir le linéarisé tangent

$$\left\{\begin{array}{lll}\dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -ax_1 - bx_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -a & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

On a donc

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -a & -b\end{bmatrix}$$

3. On calcule les valeurs propres de A

$$|\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix}\lambda & -1 \\ a & \lambda + b\end{vmatrix}$$

Soit

$$\lambda^2 + b\lambda + a = 0$$

On sait que $\mathrm{Re}\,\{\lambda_1, \lambda_2\} = -b < 0$. On conclut alors, d'après la première méthode de Lyapunov que le système est localement asymptotiquement stable autour de l'origine.

4. Afin d'étudier la stabilité globale, on passe a la deuxième méthode de Lyapunov. On propose la fonction candidate quadratique suivante :

$$V(x) = \frac{\alpha}{2}x_1^2 + \frac{\beta}{2}x_2^2, \qquad \alpha > 0, \beta > 0 \tag{4.17}$$

et on cherche les valeurs de α et β qui pourraient montrer la stabilité asymptotique globale. On vérifie les conditions du théorème de Lyapunov

① $V(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^2$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. $V(x)$ est globalement définie positive,

② On vérifie maintenant que $\dot{V}(x)$ est globalement définie négative

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) =& \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}f(x) \\ =& \frac{\partial V}{\partial x_1}f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2}f_2(x) \\ =& \alpha x_1 f_1(x) + \beta x_2 f_2(x) \\ =& \alpha x_1\left(-x_1^3 + x_2\right) + \beta x_2(-ax_1 - bx_2) \\ =& \underbrace{-\alpha x_1^4}_{\text{à garder}} + \underbrace{\alpha x_1 x_2 - a\beta x_1 x_2}_{\text{à éliminer}} \underbrace{-\beta b x_2^2}_{\text{à garder}}\end{aligned}$$

pour avoir $\alpha x_1 x_2 - a\beta x_1 x_2$ il suffit de choisir $\alpha - a\beta = 0$, soit

$$\boxed{\alpha = a\beta}$$

dans ce cas, on a

$$\boxed{\dot{V}(x) = -\alpha x_1^4 - \beta b x_2^4 < 0}$$

qui est globalement définie négative.

③ Il nous reste à montrer que $V(x)$ est radialement non bornée *i.e.*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty$$

On voit que si on choisit $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ on obtient

$$\frac{\gamma}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \leq V(x)$$

soit

$$\frac{\gamma}{2}\|x\| \leq V(x)$$

comme $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \dfrac{\gamma}{2}\|x\|^2 = +\infty$ alors

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = +\infty$$

$V(x)$ est donc radialement non bornée.

Comme les trois conditions précédentes sont vérifiées, on conclut d'après le théorème de Lyapunov sur la stabilité globale que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Troisième partie

Travaux pratiques

TP n° 1

Modélisation d'un Système non Linéaire sous Matlab/Simulink

1.1 Objectifs du TP

1. Mettre sous forme d'état non linéaire un système dynamique,
2. Modéliser avec les outils standards de Simulink d'un système non linéaire,
3. Exploiter la forme d'état d'un système non linéaire pour la modélisation.

1.2 Mise en oeuvre par la librairie Simulink

Soit le modèle non linéaire d'un fermenteur (bioréacteur) parfaitement mélangé fonctionnant en culture continue, décrit par les équations d'état suivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{dC_a}{dt} &= \left(\frac{F}{V}\right) \cdot (C_{af} - C_a) - k_0 \exp\left[-\frac{E_a}{R\,(T+460)}\right] C_a \\
\frac{dT}{dt} &= \left(\frac{F}{V}\right) \cdot (T_f - T) - \frac{\Delta H}{\rho C_p}\left[k_0 \exp\left[-\frac{E_a}{R\,(T+460)}\right] \cdot C_a\right] - \left(\frac{U \cdot A}{\rho C_p V}\right) \cdot (T - T_j)
\end{aligned}
$$

On souhaite implementer ce modèle sous Matlab / Simulink. On considérera que le système possède une seule entrée, la température de l'enceinte $u = T_j$ et comme variables d'état la concentration de la solution $x_1 = C_a$ et sa température $x_2 = T$. Les deux variables d'état peuvent êtres considérés comme des sorties observées.

1.2.1 Travail demandé

1. Créer un modèle Simulink qui implémente le modèle d'état non linéaire du fementeur en utilisant les libraires standard Simulink (voir Figure 1.1) Utiliser comme paramètres du modèle les valeurs suivantes :

```
Ea = 32400 ;
k0 = 15e12 ;
dH = -45000 ;
U = 75 ;
rhocp = 53.25 ;
```

```
R = 1.987 ;
V = 750 ;
F = 3000 ;
Caf = 0.132 ;
Tf = 60 ;
A = 1221 ;
```

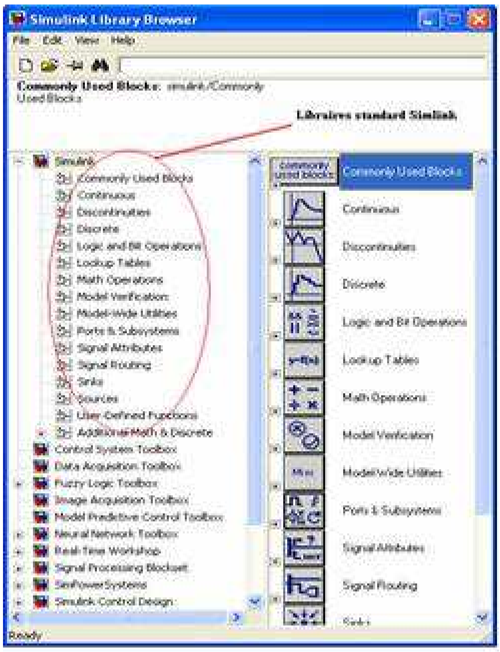


Figure 1.1 – Libraire Simulink

2. Simuler le système pour un échelon de température de $50C$ avec des conditions initiales nulles. Visualiser les deux sorties (température et concentration).
3. Refaites la même simulation avec comme conditions initiales `[Ca_init; T_init]=[0.1;40]`.

1.3 Mise en oeuvre avec un solveur Matlab

Afin d'utiliser un solveur Matlab (comme `ODE 23`, `ODE 45`) pour simuler ce système, on implémentera le modèle sous forme d'une m-fonction `fermenteur.m` qui sera déclarée sous la forme suivante :

```
function dx = fermenteur(t,x,Tj)
```

`t` représente le temps, `x` le vecteur d'état et `Tj` l'entrée de commande.

Une fois le fichier `fementeur.m` créé, le modèle peut être testé avec l'appel d'un solveur, en utilisant la syntaxe suivante (dans le cas du solveur `ode45` par exemple) :

```
>> [t,x]=ode45(@fermenteur,[0 tfinal],[x1 init; x2 init],[],Tj);
```

`tfinal`	:	temps de simulation.
`[x1 init ; x2 init]`	:	état initial
`Tj`	:	entrée

1.3.1 Travail demandé

1. Créer et compléter le fichier `fermenteur.m` comme montré ci-dessous en implémentant les équations d'état non linéaire du fermenteur

```
function dx = fermenteur(t,x,Tj)
%
% modèle du fermenteur
%
%=================Variable d'état ====================
Ca = x(1) ;
T = x(2) ;
%=================Paramètres du modèle================
Ea = 32400 ;
k0 = 15e12 ;
dH = -45000 ;
U = 75 ;
rhocp = 53.25 ;
R = 1.987 ;
V = 750 ;
F = 3000 ;
Caf = 0.132 ;
Tf = 60 ;
A = 1221 ;
%===========  Equations d'Etat=======================
dCa =           % à compléter : dérivée de Ca
dT =            % à compléter : dérivée de T
%====================================================
dx =            % à completer
```

2. Tester le modèle créé `fementeur.m` avec l'instruction `ode45` et les valeurs initiales `[Ca init; T init]= [0.1;40]` et un echelon de température de `50 °C`. Comparer avec les résultats du modèle de la partie I.

1.4 Mise en oeuvre avec des blocs `function`

La librairie standard Simulink dispose d'un bloc `function` réalisant les fonctions (Figure 1.2).

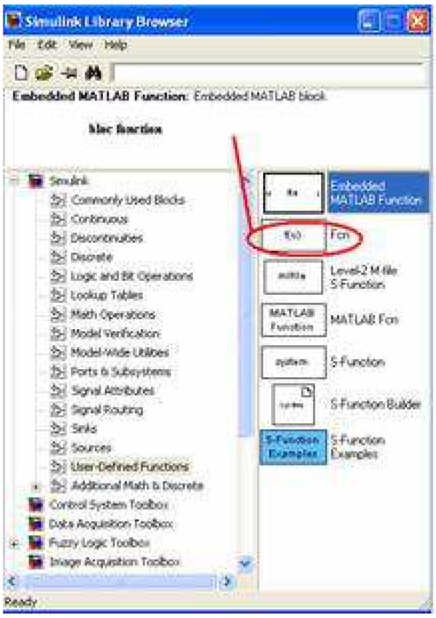


Figure 1.2 – Bloc function

1.4.1 Travail demandé

1. En utilisant le bloc function de la librairie standard Simulink, réecrire les équations du modèle de façon à définir les deux sorties `dCa` et `dT` comme une fonction des trois entrées `u(1)= Ca, u(2)=T` et `u(3)=Tj`. Obtenir ensuite `Ca` et `T` par des blocs intégrateurs (voir Figure 1.3).
2. Tester ce bloc avec comme conditions initiales `[Ca init; T init]= [0.1;40]` et un échelon de température de `50 °C`. Comparer avec les résultats précédents.

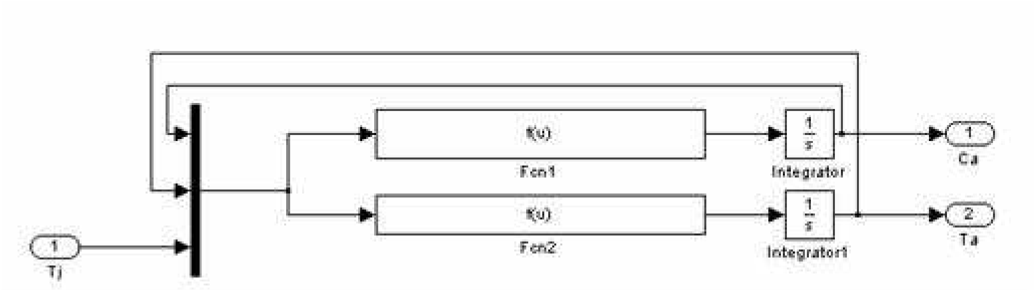


Figure 1.3 – Mise en oeuvre du modèle par blocs `funcion` et intégrateurs

1.5 Mise en oeuvre par S-function

Soit le modèle du fermenteur vu dans le TP n° 1 :

$$\frac{dC_a}{dt} = \left(\frac{F}{V}\right) \cdot (C_{af} - C_a) - k_0 \exp\left[-\frac{E_a}{R\,(T+460)}\right] C_a$$
$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{F}{V}\right) \cdot (T_f - T) - \frac{\Delta H}{\rho C_p}\left[k_0 \exp\left[-\frac{E_a}{R\,(T+460)}\right] \cdot C_a\right] - \left(\frac{U \cdot A}{\rho C_p V}\right) \cdot (T - T_j)$$

On souhaite maintenant implementer le modèle avec une S-fucnction. Soit le fichier `fermenteur_sfcn.m` montré ci-dessous :

```
function [sys,x0,str,ts]= FERMENTEUR_sfcn(t,x,u,flag,Cinit,Tinit)
switch flag
case 0 % initialize
%...
case 1 % derivatives
%...
case 3 % output
%...
case {2 4 9} % 2:discrete
    % 4:calcTimeHit
    % 9:termination
sys =[];
otherwise
error(['unhandled flag =',num2str(flag)]) ;
end
```

Après la déclaration de la S- function, elle est divisée en plusieurs cas déterminés par `flag`. La sortie est renvoyée par le vecteur colonne `sys`. Pour les cas `2, 4`, et `9`, on ne renvoie rien : `sys=[]`. Les deux dernières lignes traitement les exceptions.

Les paramètres d'entrée de la fonction `fermenteur_sfcn.m` ont la signification suivante :

1. **Paramètres d'entrée :**

   (1) `t-` variable temporelle (temps).
   (2) `x-` vecteur colonne des variables d'état.
   (3) `u-` vecteur colonne des variables d'entrée.
   (4) `flag-` informations supplémentaires utilisées par Simulink lors de la simulation.

   `flag` peut prendre des valeurs entières comme indiqué dans le tableau suivant :

`flag`	Fonction
0	**Initialisation :** (a) Définition du nombre d'entrées, sorties et états. (b) Calcul du vecteur d'état initial.
1	**Dérivées :** Mise à jour des équations d'état continues
2	**Equation discrètes :** Mise à jour des équation d'état discrètes.
3	**Calcul des sorties :** Calcul des variables de sorties en fonction du vecteur d'état et d'autres éléments des paramètres d'entrée.
9	**Fin :** Calculs effectués en fin de simulation.

   (5) `Cinit,Tinit-` Paramètres supplémentaires : Conditions initiales

2. **Paramètres de sortie :**

    (1) `sys-` vecteur des résultats de sortie transmis à Simulink.
    Dépend de la valeur de `flag`.
    Selon la valeur de `flag`, `sys` va transmettre les informations suivantes :

`flag=0`	`sys = [ a,b,c,d,e,f,g ]`
	avec,
	`a` = nombre d'états continus
	`b` = nombre d'états discret
	`c`= nombre de sorties
	`d` = nombre d'entrées
	`e= 0`
	`f= 0`
	`g= 1` pour les systèmes continus

`flag=1`	`sys` = Vecteur colonne des dérivés des variables d'état
`flag=3`	`sys` = Vecteur colonne des variables de sortie
`flag=2,4,9`	Si ces flags ne sont pas utilisés, renvoyer un vecteur vide `sys=[]`

    (2) `x0-` vecteur colonne de l'état initial.
    (3) `str-` valeur vide `str=[]`.
    (4) `ts-` matrice à deux colonnes qui spécifient les instants d'échantillonnage et les temps d'offset. Pour les système à temps continu, `ts=[0 0]` durant la phase d'initialisation.

1.5.1 Travail demandé

1. Créer un fichier `fermenteur_sfcn.m` comme montré plus haut.
2. Cas `flag=0` :
    (a) Définir `str`, `ts` et `x0` comme indiqué précédemment. On rappelle que `x0` est le vecteur ligne des conditions initiales `Cinit,Tinit` fournies en entrée. Pour `str`, l'initialiser comme matrice vide `[]`.
    (b) Remplir le vecteur `sys` par le nombre d'états, entrées et sorties comme indiqué au tableau ci-dessus. Vous pouvez créer une structure à l'aide de l'instruction `s = simsizes`, puis en définissant ces champs :

```
s.NumContStates= ...;
s.NumDiscStates= ...;
s.NumOutputs= ...;
s.NumInputs=...;
s.DirFeedthrough= 0;
s.NumSampleTimes= 1;
```

    (c) à la fin de la définition de tous les champs, vous pourrez convertir la structure `s` en vecteur par l'instruction `simsizes(s)`.
3. Cas `flag=1` : Calcul des dérivées.
    Défini la température de l'enceinte `Tj` à partir de l'entrée `u` puis utiliser le fichier `fermenteur.m` pour le calcul des dérivées renvoyées par `sys`.

4. Cas `flag=3` : Calcul des sorties.
   Définir le vecteur d'état comme sorties.
5. Dans la librairie Simulink, aller dans *User-Defined Functions* et sélectionnez un bloc S-function. Glissez le dans un fichier Simulink. Donner à ce bloc le nom de la S-function que vous avez crée `fermenteur_sfcn`. Comme paramètres, définissez les conditions initiales `Cinit`, `Tinit`.
6. Tester ce bloc avec comme conditions initiales `[Ca init; T init]= [0.1;40]` et un échelon de température de `50 °C`. Comparer avec les résultats du TP n° 1.

1.6 Bioréacteur à volume non constant

On considère maintenant un autre bioréateur à volume non constant. Il est alors décrit par les équations d'état suivantes

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ S \\ V \end{bmatrix}, \quad u = F$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \mu(x_2)x_1 \\ -\frac{1}{Y}\mu(x_2)x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{\max}x_1x_2}{k_1 + x_2 + k_2x_2^2} \\ -\frac{\mu_{\max}x_1x_2}{(k_1 + x_2 + k_2x_2^2)\,Y} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{x_3} \\ \frac{S_f - x_2}{x_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu(x_2) = \frac{\mu_{\max}x_2}{k_1 + x_2 + k_2x_2^2}$$

Les valeurs des paramètres du modèle sont donnés par

$$\begin{gathered} Y = 0.5 \\ \mu_{\max} = 1 \\ k_1 = 0.03 \\ k_2 = 0.5 \\ S_f = 10 \\ X_f = 0 \end{gathered}$$

Modéliser le bioréacteur avec les différentes façons avec lesquelles le fermenteur a été modélisé. Pour cela, refaire le même travail effectué avec le fermenteur avec le bioréateur.

TP n° 2

Analyse des Systèmes Non Linéaires par la Méthode du Plan de Phase

2.1 Objectifs du TP

1. Tracé de trajectoires de phase en utilisant les outils standard de Matlab,
2. Analyse du comportement selon les trajectoires de phase.

2.2 Tracé du portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol

On considère l'oscillateur de Van der Pol décrit par l'équation différentielle non linéaire du second ordre suivante :

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{2.1}$$

1. Créer une fonction Matlab `oscillateur.m` qui modélise le comportement de l'oscillateur. Inclure μ comme paramètre de la fonction `oscillateur.m`.
2. Simuler le système avec la fonction `oscillateur.m` et le solveur `ode45`,
3. Écrire un code qui permet de tracer le portrait de phase pour différentes conditions initiales.
4. Visualiser graphiquement l'évolution du portrait de phase en fonction de μ .

2.3 Tracé du portrait de phase du pendule simple

On considère le pendule simple du le TP précédent.

1. Reprendre le fichier `pendule.m` qui modélise le comportement du pendule.
2. Tracer les trajectoires de phase pour différentes conditions initiales.
3. Interpréter la forme des trajectoires de phase.

TP n° 3

Etude d'oscillateurs par la méthode du premier harmonique

3.1 Objectifs du TP

1. Etude théorique des conditions d'oscillations en boucle fermée en présence d'une non linéarité,
2. Simulation de systèmes comportant des non linéarités sparables,
3. Vérification des résultats de l'étude théorique en simulations.

3.2 Etude théorique des conditions d'oscillations

Soit le circuit représenté sur la figure 3.1

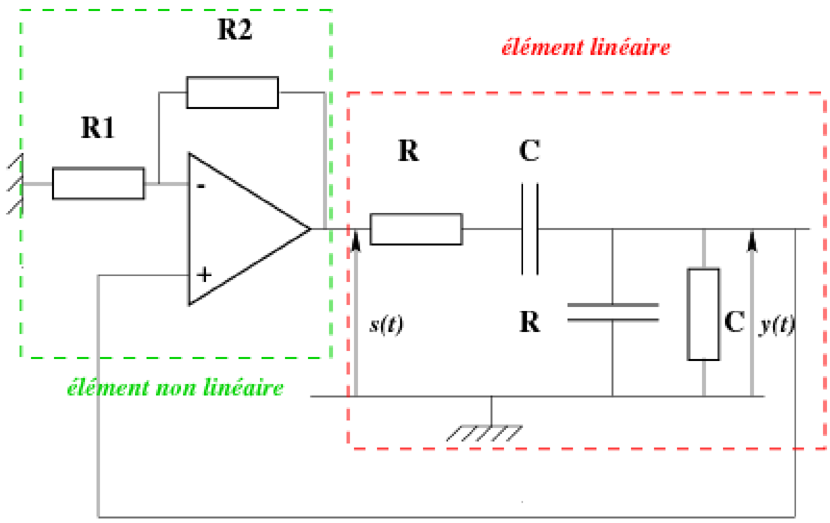


Figure 3.1 – Oscillateur de Wien.

Il s'agit de l'oscillateur de Wien. Ce dernier est composé de :

1. Un filtre linéaire constitué d'un cellule RC-série suivie d'une cellule RC-prallèle,
2. Un amplificateur opérationnel en montage amplificateur inverseur avec deux résistances R_1 et R_2

Ces deux éléments sont placé en série en boucle fermée. La sortie du filtre linéaire est injectée à l'entrée de l'amplificateur non inverseur. Le schéma bloc de la contre-réaction avec un élément non linéaire dans la boucle principale est donné par la figure 3.2

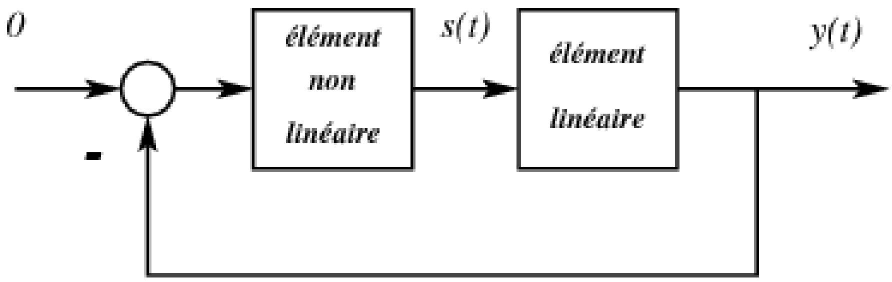


Figure 3.2 – Schéma bloc de l'oscillateur de Wien

Dans ce schéma-bloc, le bloc non linéaire est un amplificateur de gain positif K avec saturation. Le gain négatif de l'amplificateur inverseur se retrouve dans le signe moins de la contre-réaction négative.

3.2.1 Travail demandé

1. Calculer la fonction de transfert $G(s) = \dfrac{Y(s)}{S(s)}$. Exprimer cette fonction de transfert en fonction de la constante de temps $\tau = RC$.
2. Calculer le gain de K l'élément non linéaire en régime d'amplification linéaire en fonction des résistances R_1 et R_2.
3. La caractéristique de l'élément non linéaire est donnée par la figure 3.3.

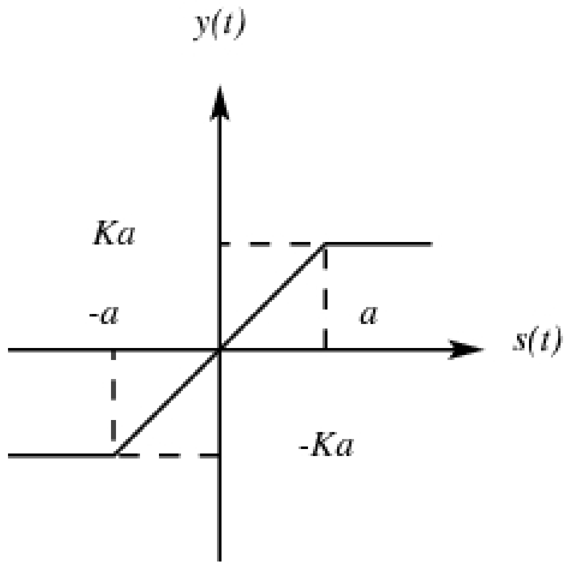


Figure 3.3 – Gain avec saturation.

Montrer que le gain complexe équivalent est donné par

$$N(A) = \frac{2K}{\pi}\left[\alpha + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\right] \qquad (3.1)$$

avec $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{A}$

4. Tracer le lieu de Nyquist de la fonction de transfert $G(s)$. Montrer que cette courbe est un cercle. Déterminer son centre et son rayon.
5. Sur le même graphique, tracer le lieu critique $-\dfrac{1}{N(A)}$
6. Déduire les conditions d'oscillations en fonction du gain K de l'élément non linéaire
7. Calculer les caractéristiques de l'oscillation.

3.3 Simulation de l'oscillateur de Wien avec Matlab

Simuler le système bouclé de la figure 3.2 avec Matlab en procédant comme suit :

1. Simuler le filtre linéaire par une fonction de transfert continue
2. Simuler le bloc non linéaire avec un gain de la librairie `math operations` et une saturation dans la librairie `discontinuities`. Choisir les valeurs suivantes pour les paramètres :

R	C	R_1	R_2	a
$1\,k\Omega$	$1\,\mu F$	$1\,k\Omega$	$10\,k\Omega$	$1\,V$

3. Faire varier la résistance R_2 jusqu'à l'apparition d'oscillations. Il est nécessaire d'introduire une petite perturbation (impulsion) à la sortie $y(t)$ pour démarrer les oscillations.
4. En traçant le lieu de Nyquist de $G(s)$ et le lieu critique $C(A) = -\dfrac{1}{N(A)}$, déduire les caractéristiques de l'oscillation.
5. Comparer les résultats obtenus avec ceux de l'étude théorique et conclure.
6. Augmenter le gain K au delà de la valeur limite qui provoque des oscillations. Qu'est ce qu'on observe ? Justifier ?

TP n° 4

Analyse de la Stabilité des Systèmes Non Linéaires par la Méthode de Lyapunov

4.1 Objectifs du TP

1. Exploiter les fonctions Matlab pour l'analyse de la stabilité d'un système linéaire,
2. Linéarisation et linéarisé tangent d'un système non linéaire.

4.2 Stabilité linéaire - Equation de Lyapunov

Soit le système linéaire autonome

$$\dot{x} = Ax. \tag{4.1}$$

On rappelle alors le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Stabilité linéaire) *Le système linéaire à temps invariant $\dot{x} = A$ est **asymptotiquement stable** si et seulement si*

$$\forall Q = Q^T > 0, \exists! P = P^T > 0 : A^T P + PA = -Q.$$

4.2.1 Travail demandé

Soit le système linéaire décrit par :

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A par la commande `eig`. Que peut-on déduire concernant la stabilité de ce système ?
2. Résoudre l'équation $A^T P + PA = -Q, Q = Q^T > 0$ avec la commande Matlab `lyap`. Consulter le `help` de cette fonction pour une utilisation appropriée. Utiliser une matrice identité pour Q,
3. Vérifier que la solution obtenue P est définie positive. Que peut on déduire concernant la stabilité du système ?

4.3 Interconnections de systèmes linéaires et stabilité

On rappel le théorème relatif à la stabilité d'un système linéaire

Théorème 4.2

— *Le point d'équilibre* $x_e = 0$ *du système* $\dot{x} = Ax$ *est stable si et seulement si*

1. $\forall \lambda_I, Re\{\lambda_I\} \leq 0$,
2. *Si* λ_i *est une valeur propre tel que* $Re\{\lambda_i\} = 0$ *de multiplicité algébrique* $q_i \geq 2$ *, alors* $rang(A - \lambda_i I) = n - q_i$*, où* n *est la dimension de* x*.*

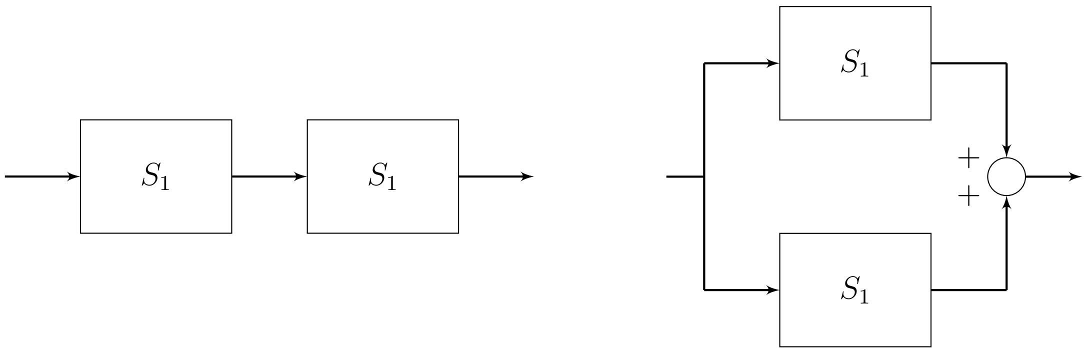
— *Le point d'équilibre du système* $\dot{x} = Ax$ *est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\forall \lambda_i, Re\{\lambda_i\} < 0$$

On considère le système linéaire S_1 décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Soit A_s et A_p les matrices d'état associées respectivement à la mise en série et en parallèle de deux blocs identiques de ce même système (voir Figure ci-dessous)



(a) Mise en série A_s (b) Mise en parallèle A_p

Figure 4.1 – Mise en série et en parallèle de S_1.

4.3.1 Travail demandé

1. Calculer les matrices A_s et A_p. Faire le calcul avec les fonctions du standard de Matlab puis avec les fonctions `series` et `parallel` du **Control System Toolbox**,
2. Calculer leurs valeurs propres. Conclure ?
3. En utilisant le théorème 4.2, que peut on conclure sur la stabilité des systèmes mis en série et en parallèle ?

4.4 Stabilité non linéaire, pendule simple

Soit le pendule simple représenté ci-dessous :

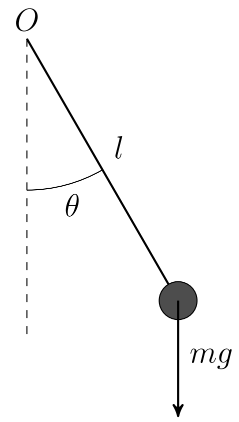


Figure 4.2 – Pendule simple.

4.4.1 Travail demandé

1. Calculer l'énergie cinétique E_c et potentielle E_p du pendule,
2. Déduire le Lagrangien $L = E_c - E_p$,
3. Déduire l'équation différentielle du mouvement en utilisant la relation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F$$

   F est un couple de frottements visqueux proportionnel à la vitesse $F = -k\theta$,
4. En choisissant $[x_1 \quad x_2]^T = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$, donner l'équation d'état non linéaire du système,
5. Calculer $V = E_c + E_p$, montrer que V est définie positive,
6. Calculer $\dot{V} = \dfrac{dV}{dt}$. Que peut-on dire de $\dot{V}$?
7. Représenter graphiquement V et $\dot{V}$. Interpréter les courbes ?
8. On considère maintenant la fonction suivante :

$$V = \frac{1}{2}x_2^2 - (\frac{g}{d} + \frac{k^2}{2m^2d^4})\cos(x_1) + \frac{k}{2md^2}x_2\sin(x_1) + (\frac{g}{d} + \frac{k^2}{2m^2d^4})$$

   (a) Calculer $\dot{V}$,
   (b) Représenter V et $\dot{V}$,
   (c) Que peut on conclure concernant la stabilité de ce système pour cette nouvelle fonction V ?

4.5 Stabilité locale, exemple du fermenteur

Soit le modèle non linéaire du fermenteur décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} & = & \mu(S)X - \dfrac{XF}{V} \\ \dfrac{dS}{dt} & = & -\dfrac{\mu(S)X}{Y} + \dfrac{(S_F - S)}{V}F \end{cases}$$

avec $\mu(S) = \mu_{max}\dfrac{S}{K_2S^2+S+K_1}$.

En choisissant comme vecteur d'état

$$x = \left[\begin{array}{cc} \bar{X} & \bar{S} \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{cc} X - X_0 & S - S_0 \end{array}\right]^T$$

et comme commande

$$u = \bar{F} = F - F_0$$

on obitent la représentation d'état suivante affine en la commande

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

avec

$$f(x) = \left[\begin{array}{c} \mu(\bar{S}+S_0)(\bar{X}+X_0) - \dfrac{(\bar{X}+X_0)F_0}{V} \\ -\dfrac{\mu(\bar{S}+S_0)(\bar{X}+X_0)}{Y} + \dfrac{(S_F-(\bar{S}+S_0)F_0)}{V} \end{array}\right]$$

et

$$g(x) = \left[\begin{array}{c} -\dfrac{(\bar{X}+X_0)}{V} \\ \dfrac{(S_F-(\bar{S}+S_0))}{V} \end{array}\right]$$

où (X_0, S_0, F_0) est un point de fonctionnement. Les constantes sont données par

$$\begin{array}{lcl} V & = & 4 \\ S_F & = & 10 \\ Y & = & 0.5 \\ \mu_{\max} & = & 1 \\ K_1 & = & 0.03 \\ K_2 & = & 0.5 \end{array}$$

4.5.1 Travail demandé

1. Montrer par calcul que le point (S_0, X_0, F_0) défini par

$$\begin{array}{lcl} S_0 & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{-2K_1+2\sqrt{K_1^2+S_F^2K_1K_2+S_FK_1}}{S_FK_2+1} \\ X_0 & = & (S_F-S_0)Y \\ F_0 & = & \mu(S_0)Y \end{array}$$

$$\text{soit} \begin{array}{r} S_0 = 0.2187 \\ X_0 = 4.8907 \\ F = 3.2089 \end{array}$$ Est un point de fonctionnement,

2. Calculer le linéarisé tangent en ce point,
3. Comparer le comportement local du système non linéaire et du linéarisé tangent au voisinage de ce point de fonctionnement. On pourra introduire une perturbation de 1.10^{-3} autour de F_0. Conclure ?
4. Etudier la stabilité locale en fonction des valeurs propres du linéarisé tangent. Conclure pour le système non linéaire ?

4.6 Travail à Remettre

4.6.1 Partie électronique

1. Mettre tout les fichiers dans un répertoire portant les noms du monôme (ou binôme) ainsi que le numéro du TP et le compresser.
2. Envoyer le fichier compressé par e-mail à l'adresse `b_boukhezzar@hotmail.com` en précisant dans le contenu du mail les noms, prénom, groupe et numéro de TP.
3. Tous les programmes doivent êtres fonctionnels à leur remise.

4.6.2 Compte-rendu

1. Répondre aux questions posées.
2. Joindre les graphes et les résultats de simulation.
3. ***Une partie importante de la note sera accordée à l'analyse des résultats et aux commentaires. Il est toujours demandé d'analyser et de commenter vos résultats même si ce n'est pas explicitement mentionné dans la question.***

TP n° 5

Commande par Retour d'Etat non Linéaire

5.1 Objectifs du TP

1. Synthèse et implémentation sous Simulink d'un commande linéarisante entrée-sortie,
2. Synthèse et implémentation sous Simulink d'une commande par linéarisation exacte.

5.2 Commande linéarisante d'un moteur à courant continu

Soit le modèle non linéaire d'un moeur à courant continu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + k - cx_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= \theta x_1 x_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont respectivement le courant de l'inducteur, le courant de l'armature et la vitesse angulaire. Les symboles a, b, c, k et θ sont des constantes positives. Pour la commande de la vitesse nous choisissons comme sortie

$$y = x_3 \tag{5.2}$$

1. Créer un modèle du moteur à courant continu sous Matlab Simulink avec une `.m S-function`. On choisit $a = b = c = 1$,$k = 0.5$, $\theta = 10$,
2. Calculer le degrè relatif de la sortie,
3. Dans quelle région de l'espace d'état le degré relatif est indéfini ?
4. Proposer une commande linéarisante entrée-sortie,
5. Calculer la valeur de la nouvelle entrée de commande v pour la poursuite d'une vitesse de référence y^* avec un temps de réponse de 0.1 s et un amortissement de $\xi = 0.9$,
6. Implémenter la commande obtenue sous Matlab Simulink.

5.3 Linérisation exacte d'un joint flexible

Soit les équations décrivant la dynamique d'un joint flexible :

$$\left\{\begin{array}{lcl} I\ddot{q}_1 + mgL\sin(q_1) + k(q_1 - q_2) & = & 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) & = & u \end{array}\right. \tag{5.3}$$

avec $I = 0.1, J = 0.001, m = 0.1, g = 10, L = 0.3, J =, k = 0.1$

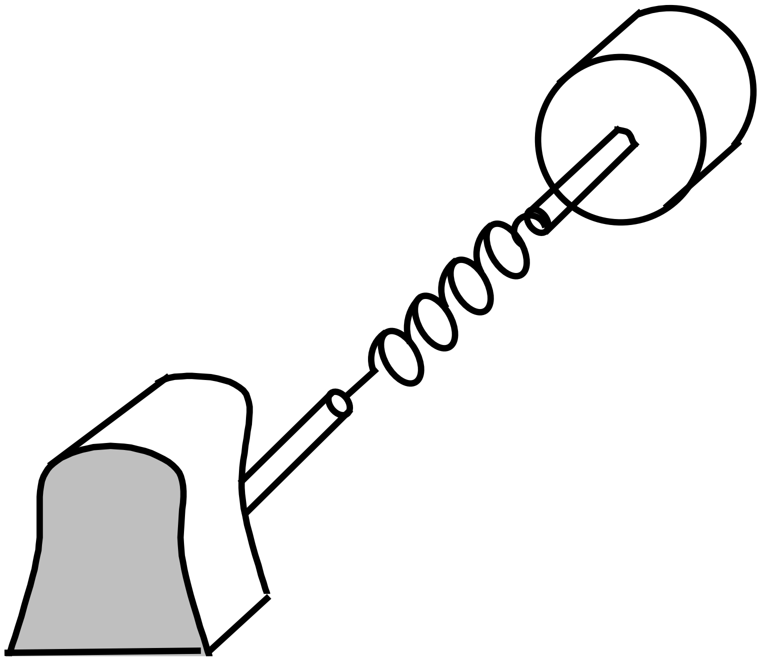


Figure 5.1 – Schéma d'un joint flexible.

1. Ecrire les équations du système sous la forme d'un système affine en la commande,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

2. Simuler le système par une S-function,
3. Construire les distributions

$$C = \{g, [f, g], [f, [f, g]], [f, [f, [f, g]]]\}$$

   et vérifier la condition d'involutivité et de commandabilité,
4. Trouver une transformation d'état $z = \Phi(x)$ et une nouvelle commande $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ tel que :

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x_4} = 0, \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0, \tag{5.4}$$

5. Trouver une commande par retour d'état non linéaire qui place alors les poles en $p_1 = -1$ et $p_2 = -2$.

Bibliographie

[1] J. J. Slotine and L. Weiping, *Applied Nonlinear Control.* Prentice-Hall, 1990.

[2] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and S. V. Drakunov, *The Control Handbook*, ch. Variable Stucture, Sliding-Mode Controller Design, pp. 941–951. CRC Press, 1996.

[3] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, pp. 212–232, March 1988.

[4] M. Zelmat, *Introduction aux Principes des Systèmes de Commande.* Algérie : Office des Publications Universitaires (OPU), 1995.

[5] L. E. Ghaoui, *Commande des Systèmes Linéaires.* ENSTA, 1995.

[6] K. M. Hangos, J. Bokor, and G. Szederkényi, *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems.* Springer-Verlag, 2004.

[7] D. Arzelier and P. Paucelle, *Systèmes et Asservissements Non Linéaires.* Notes de Cours, LAAS Toulouse, 2004.

[8] R. Husson, C. Lung, J.-F. Aubry, J. Daafouz, D. Wolf, and P. Malléus, *Automatique : Du cahier des charges à la réalisation des systèmes.* Dunod, 2007.

[9] J.-C. Gille, M. Pelegrin, and P. Decaulne, *Systèmes asservis non linéaires.* Dunod, 1988.

[10] Y. Quénec'hdu and D. Viault, *Systèmes Non Linéaires.* Polycopié de Cours, Supélec, 2000.

[11] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, 3rd ed., 2002.

[12] G. Scorletti, G. Binet, and E. Pigeon, *Introduction à l'analyse de systèmes non linéaires Méthode du premier harmonique.* Université de Caen-Basse Normandie, 2006.

[13] Z. Vukic, *Nonlinear control systems.* CRC Press, 2003.

[14] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.-P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis, *Analyse et Régulation des Processus Industriels*, vol. Tome 1 : Régulation continue. Technip, 1993.

[15] H. Siguerdidjane, *Systèmes non linéaires.* Supélec, 2007.

[16] P. Faurre and M. Robin, *Éléments d'automatique.* Dunod, 1990.

[17] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear Control Design : Geometric, adaptive and robust.* Prentice Hall, 1996.

[18] R. Hanus, *Automatique avancée 2 : Commande des systèmes non linéaires.* Hermes-Lavoisier, 2007.

[19] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, 2001.

[20] P. Müllhaupt, *Introduction à l'analyse et à la Commande des Systèmes Non Linéaires.* Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 2009.

[21] S. Laghrouche, *Commande par modes glissants d'ordre supérieur : Théorie et applications.* PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2004.